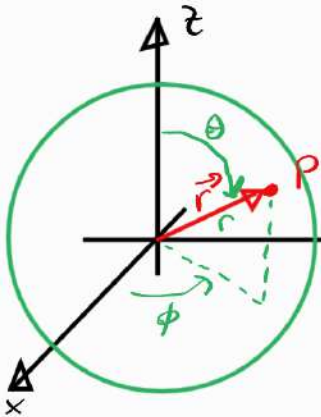


Coordenadas esféricas

En lugar de utilizar las variables (x, y, z) utilizaremos las variables (r, θ, ϕ) . Estas coord. se definen pensando a la partícula en la superficie de una esfera centrada en el origen.

En estas coordenadas es:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \rightarrow \hat{e}_r = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \rightarrow \hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \\ z &= r \cos \theta \rightarrow \hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \end{aligned}$$



Ejercicio: Deducir expresiones de $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$

De esta forma es $\vec{r} = r \hat{e}_r$

Nuevamente, notamos que $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ son funciones solo de θ y ϕ y $\hat{e}_\phi$ solo de ϕ .

$$\Rightarrow \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} \right)_\phi + \frac{d\phi}{dt} \left(\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} \right)_\theta = \dot{\theta} [\cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}] + \dot{\phi} [-\sin \theta \sin \phi \hat{i} + \sin \theta \cos \phi \hat{j}] = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} \right)_\phi + \frac{d\phi}{dt} \left(\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \phi} \right)_\theta = \dot{\theta} [-\sin \theta \cos \phi \hat{i} - \sin \theta \sin \phi \hat{j} - \cos \theta \hat{k}] + \dot{\phi} [-\cos \theta \sin \phi \hat{i} + \cos \theta \cos \phi \hat{j}] = -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi$$

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi} = \dot{\phi} [-\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{j}] = \dot{\phi} [-\sin \theta \hat{e}_r - \cos \theta \hat{e}_\theta] = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\theta$$

Entonces, en estas coordenadas la velocidad y aceleración toman la forma:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\dot{r}}{dt} \hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} \hat{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \frac{d(r\dot{\phi} \sin \theta)}{dt} \hat{e}_\phi + r\dot{\phi} \sin \theta \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} \\ &= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r + r \ddot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi \\ &\quad + \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + r \ddot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \hat{e}_r - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{e}_\theta \end{aligned}$$

resumiendo:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r$$

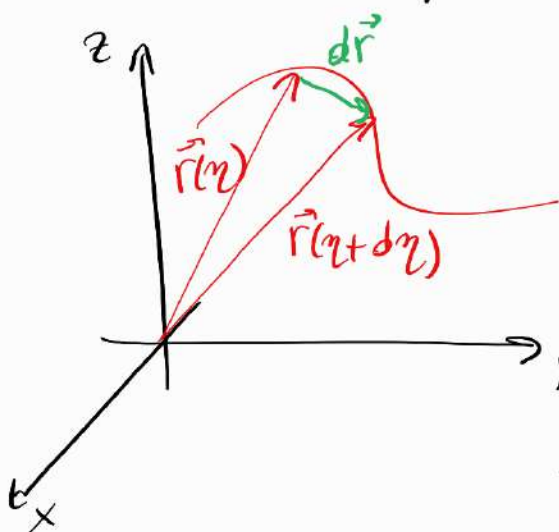
$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta) \hat{e}_\phi$$

Coordenadas Intrínsecas

En ocasiones es útil un sistema de coordenadas donde dos de los versores se alineen con el vector velocidad ($\hat{t}$) y el vector normal a la trayectoria ($\hat{n}$). A partir de ellos se completa la base directa definiendo el versor binormal ($\hat{b}$).

Este sist. de coordenadas es particularmente útil cuando se conoce la trayectoria de antemano y conocemos una parametrización de la trayectoria $\vec{r}(\eta)$



$$d\vec{r} = \left[\left(\frac{dx}{d\eta} \right) \hat{i} + \left(\frac{dy}{d\eta} \right) \hat{j} + \left(\frac{dz}{d\eta} \right) \hat{k} \right] d\eta$$

definimos la coordenada s como la distancia recorrida. Entonces es:

$$ds \equiv |d\vec{r}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta} \right)^2} d\eta$$

$$s = s_0 + \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta} \right)^2} d\eta$$

Es claro que $\frac{ds}{dt} = |\vec{v}|$. El movimiento está, entonces, parametrizado únicamente por la coordenada curvilínea s .

La velocidad será: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{r}}{ds}$

definimos el versor tangente $\hat{t}$ como: $\hat{t} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}$

$\hat{t}$ tiene norma 1 ya que $ds = |d\vec{r}| \Rightarrow |ds| = |d\vec{r}|$

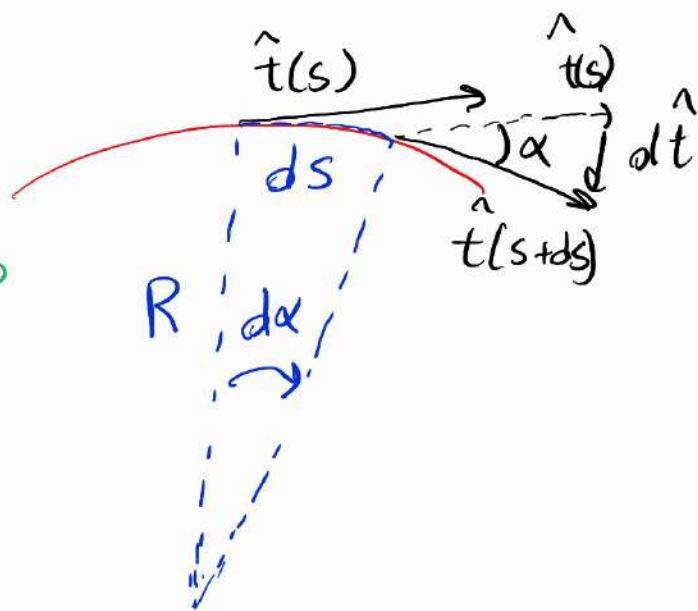
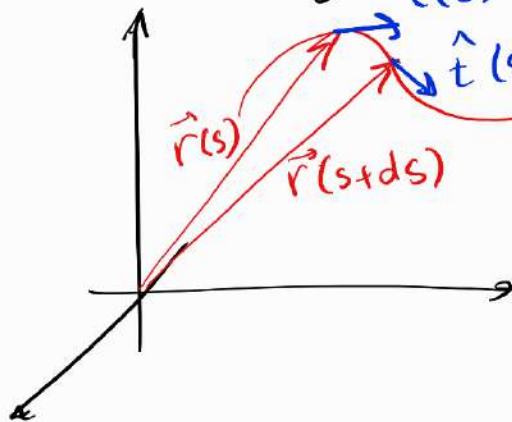
$$(\hat{t} = \hat{e}_s). \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{s} \hat{t}$$

Como $\hat{t}$ tiene norma 1 es $\hat{t} \cdot \hat{t} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\hat{t} \cdot \hat{t}) = 0$

Esto implica que $\hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{dt} = 0 \Rightarrow \hat{t} \perp \frac{d\hat{t}}{dt}$.

pero, nuevamente, $\hat{t}$ es sólo función de $s \Rightarrow \frac{d\hat{t}}{dt} = \dot{s} \frac{d\hat{t}}{ds}$

¿Qué significa esto?



con R el radio de curvatura de la trayectoria y
Se denomina curvatura $K \equiv R$.

$\Rightarrow$ Al igual que $ds = R d\alpha$,
es $d\hat{t} = \hat{n} d\alpha$ con $\hat{n}$ un versor unitario que
apunta en el sentido del cambio de $\hat{t}$

$$\Rightarrow d\hat{t} = \frac{d\hat{t}}{ds} ds = \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{d\alpha} d\alpha = R \frac{d\hat{t}}{ds} d\alpha \Rightarrow \hat{n} = R \frac{d\hat{t}}{ds}$$

$$\text{y por lo tanto } \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \dot{s} = \frac{\dot{s}}{R} \hat{n}.$$

De esta forma, la aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} \hat{t} + \dot{s} \frac{d\hat{t}}{dt} = \ddot{s} \hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \hat{n}$$

En resumen:

$$\hat{t} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\hat{n} \equiv R \frac{d\hat{t}}{ds}, \quad R = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|^{-1}$$

$$\hat{b} \equiv \hat{t} \times \hat{n}$$

$$s - s_0 = \int_{s_0}^s \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dz}\right)^2} dz = \int_{t_0}^t |\vec{v}| dt$$

$\uparrow$
si $\eta = t$.

$$\vec{v} = \dot{s} \hat{t}$$

$$\vec{a} = \ddot{s} \hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \hat{n}$$

Completamos el triedro o base (denominado "triedro de Frenet") con el versor "binormal" $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$

Se denomina torsión τ al cambio de $\hat{b}$ con s :

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{t} \times \hat{n}) = \underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds} \times \hat{n}}_{\text{ya q. } \frac{d\hat{t}}{ds} \parallel \hat{n}} + \hat{t} \times \frac{d\hat{n}}{ds} = \hat{t} \times \frac{d\hat{n}}{ds} \perp \hat{t}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{además } \frac{d\hat{b}}{ds} \perp \hat{b} \text{ ya que } \frac{d}{ds}(\hat{b} \cdot \hat{b}) = 0 = 2 \frac{d\hat{b}}{ds} \cdot \hat{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n}$$

define la torsión.

Observaciones:

- Si $\tau = 0$ siempre $\Rightarrow$ la trayectoria es plana
- Si $\kappa = 0$ siempre $\Rightarrow$ la trayectoria es lineal

Ejemplo: Movimiento proyectil en coord. intrínsecas

Considere el problema de una partícula moviéndose con una aceleración

$$\vec{a} = -g \hat{k} \quad \vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{j} + v_0 \sin \theta \hat{k} \quad \text{a) mostrar que } \ddot{s} = -g \sin \psi$$

$$\kappa \dot{s}^2 = g \cos \psi$$

b) mostrar que $\frac{1}{v} \frac{dv}{d\psi} = \tan \psi$ y deduzca que $v \cos \psi = \text{cte}$

c) pruebe que $\frac{dy}{d\psi} = -\frac{v^2}{g}$ y muestre que la trayectoria es una parábola

$$\left. \begin{aligned} \ddot{s} \hat{t} + \kappa \dot{s}^2 \hat{n} &= -g \hat{k} \\ \hat{k} &= \sin \psi \hat{t} - \cos \psi \hat{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{s} &= -g \sin \psi \quad \text{I} \\ \kappa \dot{s}^2 &= g \cos \psi \quad \text{II} \end{aligned}$$

$$\text{b) } v = \dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{dv}{dt} = \dot{\psi} \frac{dv}{d\psi}$$

$$\text{Además es } -R d\psi = ds \quad (d\psi < 0)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\psi} = -R = -\frac{1}{\kappa}$$

$$\Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\psi} \dot{\psi} = -\frac{1}{\kappa} \dot{\psi} \quad (*)$$

$$\text{de a) es: } -\tan \psi = \frac{\ddot{s}}{\kappa \dot{s}^2} = \frac{\ddot{s}}{\kappa \dot{s} v} = \frac{\dot{\psi} \frac{dv}{d\psi}}{\kappa (-\kappa^{-1} \dot{\psi}) v}$$

$$\text{II} \Rightarrow \tan \psi = \frac{1}{v} \frac{dv}{d\psi}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta}^{\psi} \frac{1}{v} \frac{dv}{d\psi'} d\psi' = \int_{\theta}^{\psi} \tan \psi' d\psi'$$

$$\parallel$$

$$\int_{v(\theta)}^{v(\psi)} \frac{dv}{v} = -\ln \left(\frac{\cos \psi}{\cos \theta} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\ln \left(\frac{v}{v_0} \right) \rightarrow v \cos \psi = v_0 \cos \theta = \text{cte} \quad (**)$$

$$\text{c) } \frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} = v \cos \psi \frac{1}{\dot{\psi}} \stackrel{(**)}{=} -\frac{\cos \psi}{\kappa} \stackrel{(**)}{=} -\frac{\dot{s}^2}{g} = -\frac{v^2}{g} = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g \cos^2 \psi} \Rightarrow \int_{\theta}^{\psi} \frac{dy}{d\psi'} d\psi' = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \int_{\theta}^{\psi} \frac{d\psi'}{\cos^2 \psi'}$$

$$\Rightarrow y(\psi) - y(\theta) = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} (\tan \psi - \tan \theta) \quad \text{Por otro lado } \frac{dz}{d\psi} = \tan \psi$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\psi} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} (y - y_0) + \tan \theta \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{dz}{d\psi'} d\psi' = \int_{y_0}^y \left[-\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} (y' - y_0) + \tan \theta \right] dy'$$

$$\Rightarrow z = z_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} \frac{(y - y_0)^2}{2} + \tan \theta (y - y_0) \quad \left(\text{comparen con: } y = y_0 + v_0 \cos \theta t \right)$$

$$z = z_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{g t^2}{2}$$

I.2.c - Movimiento relativo

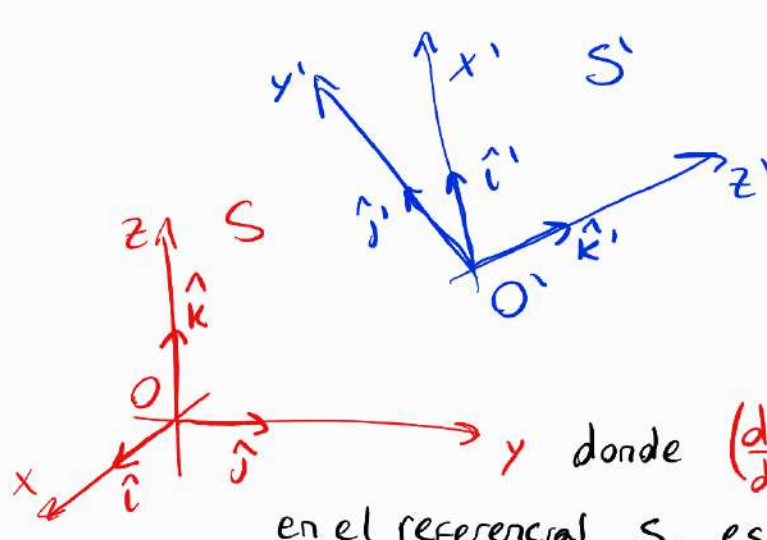
Hemos dejado establecido desde el comienzo que las mediciones de posición, velocidad, etc. dependen del estado de movimiento del observador (dependen del referencial).

Por este motivo, en muchas ocasiones es útil poder convertir la descripción del movimiento entre diferentes referenciales (y aunque aún no lo hemos hablado, ninguno de estos tiene por que ser un referencial inercial).

Consideraremos tres escenarios: (i) Traslación relativa pura, (ii) rotación relativa pura, (iii) movimiento relativo general (una combinación de los dos casos previos)

Caso (i): traslación relativa pura.

Consideremos el caso de dos sistemas de referencia S y S' que poseen entre ellos un movimiento de traslación pura: Es decir si fijamos un pto de referencia y sentidos fijos en cada uno de los referenciales, dados por: $\{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ y $\{O', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ para S y S' , respectivamente, entonces será:


$$\left(\frac{d\hat{i}'}{dt}\right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}} = \left(\frac{d\hat{j}'}{dt}\right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}} = \left(\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}} = 0$$
$$\left(\frac{d\hat{i}}{dt'}\right)_{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'} = \left(\frac{d\hat{j}}{dt'}\right)_{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'} = \left(\frac{d\hat{k}}{dt'}\right)_{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'} = 0$$

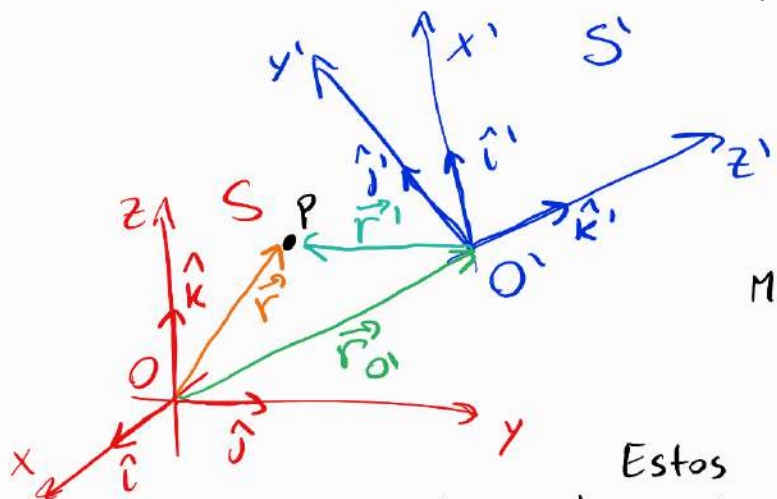
donde $\left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}}$ es la derivada temporal en el referencial S , es decir considerando $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ que no varían en el tiempo.

De igual forma $\left(\frac{d\bullet}{dt'}\right)_{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'}$ es la derivada temporal en el referencial S' .

Para abreviar denotaremos $\frac{d\bullet}{dt_S} \equiv \left(\frac{d\bullet}{dt}\right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}}$ y $\frac{d\bullet}{dt_{S'}} \equiv \left(\frac{d\bullet}{dt'}\right)_{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'}$

Lo anterior implica entonces que $\frac{d}{dt_S} = \frac{d}{dt_{S'}}$, en este caso (i), y para abreviar escribiremos $\frac{d}{dt}$

Hemos pues t y t' para referir al tiempo medido desde uno u otro referencial. En la mecánica Newtoniana, una hipótesis fundamental es que este tiempo, o más bien, variaciones de este es el mismo para todos los observadores. Es decir que, a menos de una constante aditiva que dependerá del 0 temporal, será $t=t'$. Por esto dejaremos de hacer mención al tiempo de uno u otro referencial y simplemente diremos t .



la posición de una partícula P vista desde S, será:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},$$

Mientras que vista desde S', será:

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'.$$

Estos dos vectores se relacionan mediante el vector de la posición relativa de O' respecto de O , $\vec{r}_0$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad (*)$$

la velocidad de la partícula P vista desde S será: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ la velocidad de la partícula P vista desde S' será: $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$

Dado (*) se tiene que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

Llamamos velocidad de transporte a $\vec{v}_0$ ya que es la velocidad que tendría (medida desde S) una partícula en reposo en S' ($\vec{v}'=0$).

De igual forma tendremos para las aceleraciones $\vec{a}$ y $\vec{a}'$ de la partícula P vista desde S y S', respectivamente, que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

Donde nuevamente llamamos aceleración de transporte a $\vec{a}_0$ ya que es la aceleración (vista desde S) que tendría una partícula en reposo (y fija) en S' ($\vec{v}'=0$, $\vec{a}'=0$).

Transformaciones de Galileo:

Un caso particular: $\vec{a}_{01} = 0 \rightarrow \vec{v}_{01} = \text{cte} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}$

Fijamos también $\hat{i}' = \hat{i}, \hat{j}' = \hat{j}, \hat{k}' = \hat{k}$ (esto es una cuestión de elección).

Esto nos lleva al caso particular de las transformaciones de Galileo. Las coordenadas de un evento que sucede en las coordenadas (x, y, z, t) según S , ocurren en las coordenadas (x', y', z', t') dados por:

$$x' = (x - \tilde{x}_{01}) - v_{0x}t$$

$$y' = (y - \tilde{y}_{01}) - v_{0y}t$$

$$z' = (z - \tilde{z}_{01}) - v_{0z}t$$

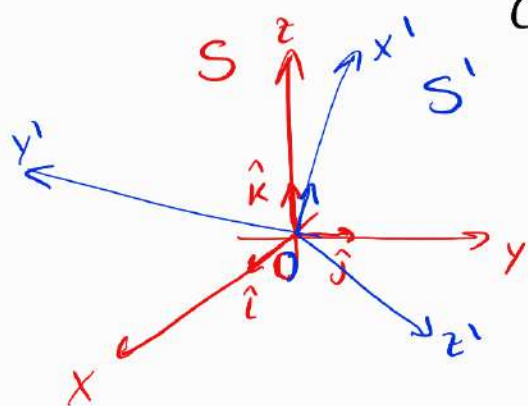
$$t' = t$$

Ya que: $\vec{r}_{01} = \vec{\tilde{r}}_{01} + \vec{v}_{01}t$, siendo $\vec{\tilde{r}}_{01} = \tilde{x}_{01}\hat{i} + \tilde{y}_{01}\hat{j} + \tilde{z}_{01}\hat{k}$ la posición de O' respecto de O al tiempo $t=0$: $\vec{r}_{01}(t=0) = \vec{\tilde{r}}_{01}$.

Estas son las transformaciones entre referenciales sin aceleración relativa y, en el caso de que los referenciales sean inerciales, describen las transformaciones entre referenciales inerciales

caso (ii): rotación relativa pura

Ahora consideramos el caso en que los sistemas de referencia tienen un comportamiento de rotación relativa pura. Esto implica que existe un punto del referencial S' que está en reposo en S . Utilizando este punto como O y O' simultáneamente, tendremos tres sentidos fijos en cada referencial y un pto común $O=O'$: $\{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ y $\{O, \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ para S y S' respectivamente.



Como los orígenes coinciden la posición de una partícula P será:

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

Ahora sí cobra importancia la notación $\frac{d}{dt_S}$ y $\frac{d}{dt_{S'}}$ como

veremos si queremos relacionar las velocidades medidas desde uno u otro referencial.

Consideremos la velocidad de la partícula P. Desde el referencial S será

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt_S} = \frac{d}{dt_S}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

↑
recordar que $\frac{d}{dt_S} \equiv \left(\frac{d}{dt}\right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}}$

sin embargo, como $\vec{r} = \vec{r}'$ podemos escribir:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt_S}(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') = \underbrace{\frac{dx'}{dt_S}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt_S}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt_S}\hat{k}'}_{\vec{v}'} + \underbrace{x'\frac{d\hat{i}'}{dt_S} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt_S} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt_S}}_{\text{?}}$$

Los primeros 3 términos " " corresponden a $\frac{d(\vec{r}')}{dt_S}$, es decir a $\vec{v}'$. sin embargo, ¿qué representan los 3 últimos términos " "?

Visto desde S , los versores $\hat{i}', \hat{j}'$ y $\hat{k}'$ están moviéndose. Para entenderlo, consideremos los vectores $\frac{d\hat{i}'}{dt_S}$, $\frac{d\hat{j}'}{dt_S}$ y $\frac{d\hat{k}'}{dt_S}$ y representemos a estos desde S' :

Recordemos que en las bases ortonormales que estamos considerando es

$$\hat{e}_n \cdot \hat{e}_l = \delta_{nl} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=l \\ 0 & \text{si } n \neq l \end{cases}$$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt_S} = a_{11}\hat{i}' + a_{12}\hat{j}' + a_{13}\hat{k}'$$

$$\frac{d\hat{j}'}{dt_S} = a_{21}\hat{i}' + a_{22}\hat{j}' + a_{23}\hat{k}'$$

$$\frac{d\hat{k}'}{dt_S} = a_{31}\hat{i}' + a_{32}\hat{j}' + a_{33}\hat{k}'$$

y por tanto es $\frac{d(\hat{e}_n \cdot \hat{e}_l)}{dt_S} = 0$ (I)

(I) implica que $\hat{i}' \cdot \frac{d\hat{i}'}{dt_S} = 0 = a_{11}$ ya que $\frac{d(\hat{i}' \cdot \hat{i}')}{dt_S} = 2 \frac{d\hat{i}'}{dt_S} \cdot \hat{i}' = 0$

y, análogamente con $\hat{j}'$ y $\hat{k}'$, es $a_{22} = a_{33} = 0$. Por otro lado, (I)

aplicado a $\hat{i}' \cdot \hat{j}'$ implica que $\hat{i}' \cdot \frac{d\hat{j}'}{dt_S} + \hat{j}' \cdot \frac{d\hat{i}'}{dt_S} = a_{21} + a_{12} = 0$

por lo que $a_{12} = -a_{21} \equiv \omega_3'$. Procediendo de igual forma para las otras parejas de versores concluimos que $a_{23} = -a_{32} \equiv \omega_1'$ y que $a_{31} = -a_{13} \equiv \omega_2'$.

Escribiendo los versores $\hat{i}' = \hat{e}_1$, $\hat{j}' = \hat{e}_2$ y $\hat{k}' = \hat{e}_3$, esta información podemos resumirla como:

$$a_{nl} = \sum_{m=1}^3 \epsilon_{nlm} \omega_m \quad \left\{ \Rightarrow \frac{d\hat{e}_n}{dt_S} = \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{nlm} \hat{e}_l \omega_m \right.$$

o si definimos $\vec{\omega} = \sum_{m=1}^3 \omega_m \hat{e}_m$

$$\left(\text{también es } \vec{\omega} = \sum_{m=1}^3 \omega_m \hat{e}_m \right)$$

$$= \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 \epsilon_{mnl} \hat{e}_l \right) \omega_m$$

$$= \sum_{m=1}^3 \left(\hat{e}_m \times \hat{e}_n \right) \omega_m$$

$$= \left(\sum_{m=1}^3 \omega_m \hat{e}_m \right) \times \hat{e}_n$$

Por lo que $\frac{d\hat{e}_n}{dt_S} = \vec{\omega} \times \hat{e}_n$ y volviendo a los términos "✓"

Estos se convierten en:

$$x' \vec{\omega} \times \hat{i}' + y' \vec{\omega} \times \hat{j}' + z' \vec{\omega} \times \hat{k}' = \vec{\omega} \times (x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}') = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Si bien esto lo escribimos para el vector posición, es válido para cualquier vector $\vec{A}$ escrito en las bases $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ o $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$: $\vec{A} = \sum_{m=1}^3 a_m \hat{e}_m = \sum_{m=1}^3 a'_m \hat{e}'_m$

y por tanto concluimos que:

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt_S} = \frac{d\vec{A}}{dt_{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad \text{Teorema de Roberval}}$$

Observación 1: si $\frac{d\vec{A}}{dt_{S'}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt_S} = \vec{\omega} \times \vec{A}$

Teorema de Roberval: La derivada temporal de un vector $\vec{A}$ en un cierto referencial S es igual a la derivada temporal desde otro referencial S' más la derivada temporal respecto a S considerando a $\vec{A}$ en reposo en S' .

Observación 2: si tomamos $\vec{A} = \vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt_S} = \frac{d\vec{\omega}}{dt_{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt_{S'}}$
y por tanto no hay ambigüedad en escribir $\dot{\vec{\omega}}$.

Volviendo al vector posición tenemos en este caso (ii) de rotación pura que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt_S} = \frac{d\vec{r}'}{dt_S} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$\vec{r}' = \vec{r}$

llamamos velocidad de transporte a $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ ya que es la velocidad vista desde S que tiene una partícula en reposo en S' .

Si aplicamos el teorema de Roberval a la velocidad llegamos a:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt_S} &= \frac{d}{dt_{S'}}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \frac{d\vec{v}'}{dt_{S'}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt_{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\end{aligned}$$

que se simplifica a:

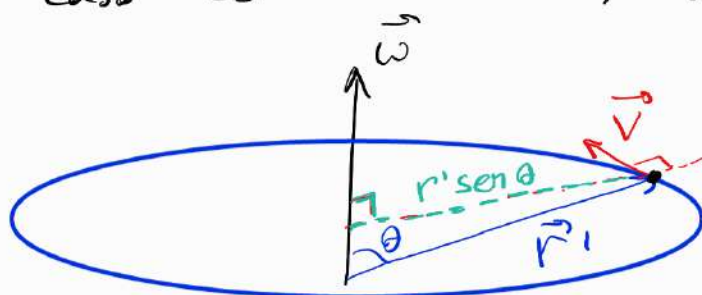
$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

En este caso la aceleración de transporte es: $\vec{a}_T \equiv \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ mientras que el término $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ se denomina aceleración de Coriolis $\vec{a}_C$

• Qué es el vector $\vec{\omega}$ que veremos mencionando?

Consideremos el caso de una partícula P en reposo en S' .

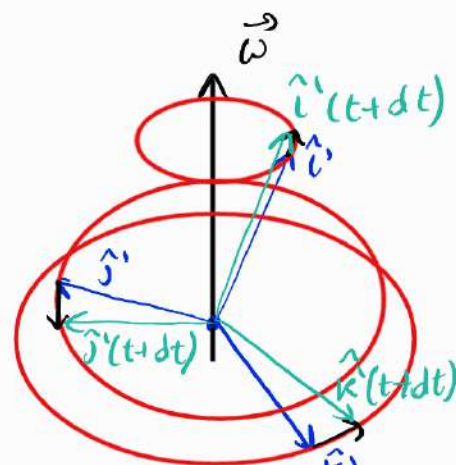
En este caso es $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$, $|\vec{\omega} \times \vec{r}'| = \omega r' \sin \theta$



Esto pone de manifiesto que $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de la partícula medida desde S . Pero dado que la partícula está en reposo en el referencial, en realidad $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del referencial S respecto de S' . Si consideramos las expresiones:

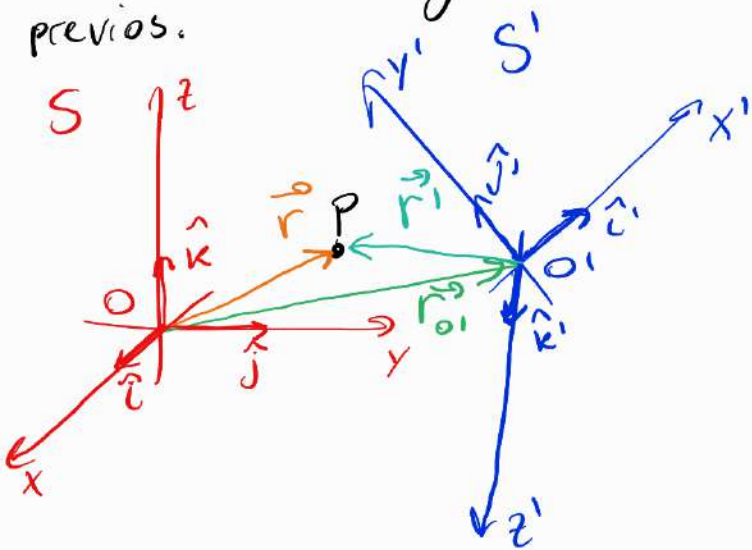
$$\left. \begin{aligned}\frac{d\hat{i}'}{dt_S} &= \vec{\omega} \times \hat{i}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt_S} &= \vec{\omega} \times \hat{j}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt_S} &= \vec{\omega} \times \hat{k}'\end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned}\hat{i}'(t+dt) &\approx \hat{i}'(t) + dt(\vec{\omega} \times \hat{i}'(t)) \\ \hat{j}'(t+dt) &\approx \hat{j}'(t) + dt(\vec{\omega} \times \hat{j}'(t)) \\ \hat{k}'(t+dt) &\approx \hat{k}'(t) + dt(\vec{\omega} \times \hat{k}'(t))\end{aligned}$$

todo el referencial gira con velocidad angular $\vec{\omega}$.



caso (iii): Movimiento relativo general.

El caso más general es una composición de los dos casos previos.



Una partícula P en el referencial S' que está en la posición $\vec{r}'$ (respecto de O') estará en el referencial S en la posición:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}',$$

donde $\vec{r}_0$ es la posición del punto de referencia O' del referencial S' .

La velocidad de la partícula P en el referencial S será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt_S} = \frac{d\vec{r}_0}{dt_S} + \frac{d\vec{r}'}{dt_S} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{r}'}{dt_{S'}} + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

↑
T. de Roberval

donde $\vec{v}_0$ es la velocidad de O' en el referencial S .

Simplificando:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}',$$

siendo $\vec{v}'$ la velocidad de la partícula P medida en S' .

Llamamos velocidad de transporte $\vec{v}_T$ a la velocidad que tendría una partícula en reposo en S' si es medida desde S :

$$\vec{v}_T = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Si volvemos a aplicar este razonamiento será que la aceleración vista desde S de P será:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt_S} = \frac{d\vec{v}_0}{dt_S} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt_S} + \frac{d\vec{v}'}{dt_S} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt_S} + \frac{d\vec{v}'}{dt_S} \\ &= \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt_S} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) + \frac{d\vec{v}'}{dt_S} + \vec{\omega} \times \vec{v}'\end{aligned}$$

↑
T. de Roberval

y finalmente esto toma la forma de lo que denominamos teorema de Coriolis:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'}$$

Teorema de Coriolis

Nuevamente, a la aceleración de una partícula en reposo en S' ($\vec{a}'=0$, $\vec{v}'=0$) le denominamos aceleración de transporte $\vec{a}_T$ y comprende los 3 primeros términos:

$$\vec{a}_T = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Denominamos aceleración de coriolis $\vec{a}_c$ a:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

De esta forma escribimos el teorema de Coriolis, que relaciona las aceleraciones medidas desde 2 referenciales diferentes, como:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c + \vec{a}'$$

Teorema de adición de velocidades angulares

Consideremos ahora 3 sistemas de referencia S , S' y S'' , genéricos. El teorema de adición de velocidades angulares establece que la velocidad angular del referencial S'' respecto de S , $\vec{\omega}_{S''/S}$ se relaciona con las velocidades angulares $\vec{\omega}_{S''/S'}$ y $\vec{\omega}_{S'/S}$ de S'' respecto de S' y de S' respecto de S , respectivamente, mediante:

$$\vec{\omega}_{S''/S} = \vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S}$$

Teorema de adición de velocidades angulares

Para mostrar esto consideramos un vector genérico $\vec{A}''$ en reposo en S'' .

Según S' será: $\frac{d\vec{A}''}{dt_{S'}} = \frac{d\vec{A}''}{dt_{S''}} + \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A}'' = \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A}''$ (I)

y según S será: $\frac{d\vec{A}''}{dt_S} = \frac{d\vec{A}''}{dt_{S'}} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{A}''$ (II)

sustituyendo (I) en (II) es:

$$\frac{d\vec{A}''}{dt_S} = \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A}'' + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{A}'' = (\vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S}) \times \vec{A}''$$
 (III)

sin embargo, así como escribimos (II) usando el teorema de Roberval entre S y S' , podemos utilizarlo entre S y S'' dando:

$$\frac{d\vec{A}''}{dt_S} = \frac{d\vec{A}''}{dt_{S''}} + \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A}'' = \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A}''$$
 (IV)

comparando (III) y (IV) es: $(\vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S}) \times \vec{A}'' = \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A}''$

como esto debe ser válido $\forall \vec{A}''$, concluimos que: $\vec{\omega}_{S''/S} = \vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S}$

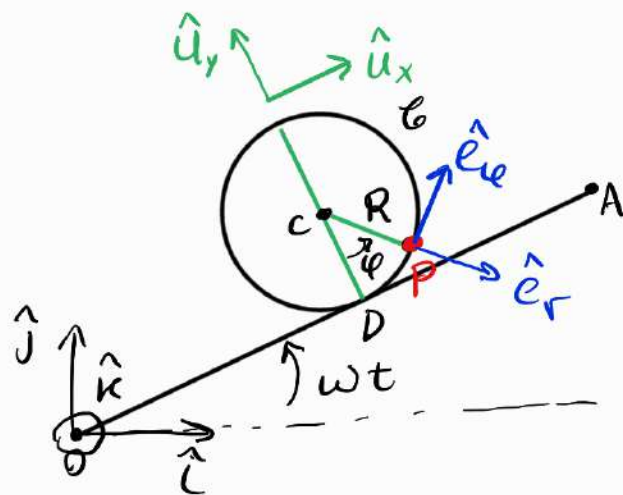
Ejemplo:

La guía OA gira alrededor del punto O (fijo) con velocidad angular ω constante. A una distancia d de O se halla el punto D. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro C y radio R tangente a la guía OA en D. Sobre $\mathcal{C}$ se mueve un punto P describiendo un movimiento circular. Sean φ el ángulo marcado en la figura y los versores $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{e}_r$ y $\hat{e}_\varphi$ también marcados en la figura.

a) Hallar directamente la derivada respecto del tiempo de los versores $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{e}_r$ y $\hat{e}_\varphi$ en el referencial $\{\hat{O}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

b) Hallar la velocidad y aceleración del punto P en el referencial $\{\hat{O}, \hat{i}, \hat{j}\}$ considerando un sistema de referencia conveniente derivando $\vec{r}_P$.

c) Repetir utilizando otro método.



$$a) \quad \hat{u}_x = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j}$$

$$\hat{u}_y = -\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \sin \varphi \hat{u}_x - \cos \varphi \hat{u}_y = [\sin \varphi \cos(\omega t) + \cos \varphi \sin(\omega t)] \hat{i} \\ &\quad + [\sin \varphi \sin(\omega t) - \cos \varphi \cos(\omega t)] \hat{j} \\ &= \sin(\omega t + \varphi) \hat{i} - \cos(\omega t + \varphi) \hat{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi &= \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \varphi \hat{u}_y = [\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t)] \hat{i} \\ &\quad + [\cos \varphi \sin(\omega t) + \sin \varphi \cos(\omega t)] \hat{j} \\ &= \cos(\omega t + \varphi) \hat{i} + \sin(\omega t + \varphi) \hat{j} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\hat{u}_x}{dt} \right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}} = \omega [-\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{j}] = \omega \hat{u}_y$$

$$\left(\frac{d\hat{u}_y}{dt} \right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}} = \omega [-\cos(\omega t) \hat{i} - \sin(\omega t) \hat{j}] = -\omega \hat{u}_x$$

$$\left(\frac{d\hat{e}_r}{dt} \right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}} = (\omega + \dot{\varphi}) [\cos(\omega t + \varphi) \hat{i} + \sin(\omega t + \varphi) \hat{j}] = (\omega + \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi$$

$$\left(\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} \right)_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}} = (\omega + \dot{\varphi}) [-\sin(\omega t + \varphi) \hat{i} + \cos(\omega t + \varphi) \hat{j}] = -(\omega + \dot{\varphi}) \hat{e}_r$$

b) Tomando $\{O, \hat{i}, \hat{j}\}$

$$\vec{r}_p = d\hat{u}_x + R\hat{u}_y + R\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p = d\left(\frac{d\hat{u}_x}{dt}\right) + R\left(\frac{d\hat{u}_y}{dt}\right) + R\left(\frac{d\hat{e}_r}{dt}\right) = \omega(d\hat{u}_y - R\hat{u}_x) + R(\omega + \dot{\varphi})\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_p = \omega(-d\omega\hat{u}_x - R\omega\hat{u}_y) - R(\omega + \dot{\varphi})^2\hat{e}_r + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{a}_p = -\omega^2(d\hat{u}_x + R\hat{u}_y) - (\omega + \dot{\varphi})^2 R\hat{e}_r + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

c) sea S determinado por $\{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, S' determinado por $\{C, \hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\}$ y S'' determinado por $\{O, \hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{k}\}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_p &= \cancel{\vec{v}_p''} + \vec{v}_c + \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{r}_p'' \\ \vec{v}_c &= \cancel{\vec{v}_c'} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{r}_c' \end{aligned} \right\} \vec{v}_p = \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{r}_c' + \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{r}_p''$$

$$\vec{\omega}_{S'/S} = \omega\hat{k} \quad (\text{por letra})$$

$$\vec{r}_c' = d\hat{u}_x + R\hat{u}_y$$

$$\vec{\omega}_{S''/S} = \vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S} = \dot{\varphi}\hat{k} + \omega\hat{k}$$

$$\vec{r}_p'' = R\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p = \omega\hat{k} \times (d\hat{u}_x + R\hat{u}_y) + (\omega + \dot{\varphi})\hat{k} \times R\hat{e}_r = \omega(d\hat{u}_y - R\hat{u}_x) + (\omega + \dot{\varphi})R\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_p = \cancel{\vec{a}_p''} + \vec{a}_{T_{S''}} + \vec{a}_{S''/S}(P) \quad \vec{a}_{T_{S''}}(P) = \vec{a}_c + \frac{d\vec{\omega}_{S''/S}}{dt_S} \times \vec{r}_p'' + \vec{\omega}_{S''/S} \times (\vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{r}_p'')$$

partícula en reposo en S''

$$\frac{d\vec{\omega}_{S''/S}}{dt_S} = \frac{d((\dot{\varphi} + \omega)\hat{k})}{dt_S} = \ddot{\varphi}\hat{k}$$

$$\vec{a}_c = \cancel{\vec{a}_c'} + \vec{a}_{T_{S'}}(C) + \cancel{\vec{a}_{S'/S}(C)}$$

C en reposo en S'

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}_{S''/S}}{dt_S} \times \vec{r}_p'' = \ddot{\varphi}\hat{k} \times R\hat{e}_r = \ddot{\varphi}R\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega}_{S''/S} \times (\vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{r}_p'') = (\dot{\varphi} + \omega)^2 R\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{e}_r) = -R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \hat{e}_r$$

$$\vec{a}_{T_{S'}}(C) = \cancel{\vec{a}_o} + \cancel{\vec{\omega}_{S'/S}} \times \vec{r}_c' + \vec{\omega}_{S'/S} (\vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{r}_c') = \omega\hat{k} \times (\omega\hat{k} \times (d\hat{u}_x + R\hat{u}_y))$$

$$\Rightarrow \vec{a}_c = -\omega^2(d\hat{u}_x + R\hat{u}_y)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_p = \ddot{\varphi}R\hat{e}_\varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \hat{e}_r - \omega^2(d\hat{u}_x + R\hat{u}_y)$$