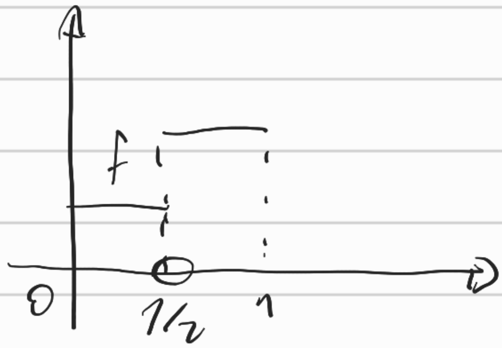
Resultados: (1) $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ continua es integrable Riemman

(2) Si $f_n:[0,1] \to \mathbb{R}$ continuas convergen unif. a $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ entonces f es continua y además

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow{n} \int_0^1 f(x)\,dx$$

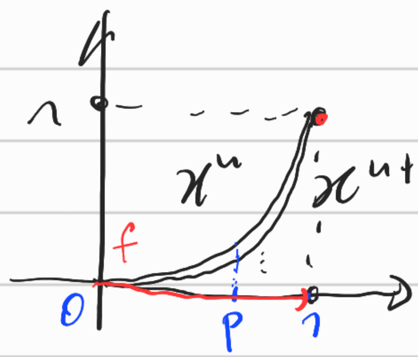
(3)



Ej 6: Caracterización de integrable Riemman

(4) Si $f_n:[0,1] \to \mathbb{R}$ continuas converge puntualmente a $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ puede que f no sea continua y de hecho puede que f no sea integrable Riemman.

Ejercicio 4

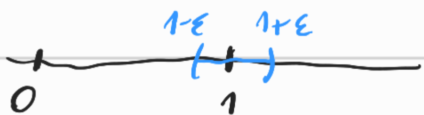


límite puntual de $f_n(x) = x^n$ es $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$\lim_n p^n \xrightarrow{n} 0$ si $p \in [0,1)$

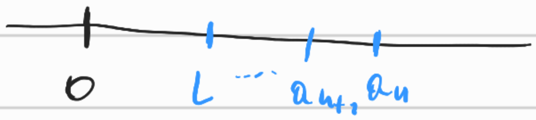
$\{1\}$

$m_*(\{1\}) = 0$



Medida exterior. $A \subset \mathbb{R}^n$, $m_*(A) = \inf \sum_{i=1}^{+\infty} |Q_i|$

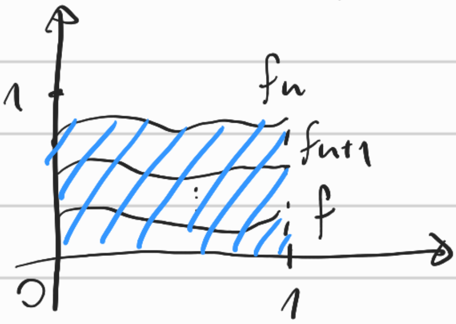
(5) Si $(a_n)_n$ sucesión decreciente en $[0,+\infty)$ entonces $\lim_n a_n = L$ existe



Sea $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ convergendiendo puntualmente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

(1) $0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall n$

(2) $f_n(x) \overset{n}{\searrow} \quad \forall x \in [0,1)$



entonces $a_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ es decreciente,

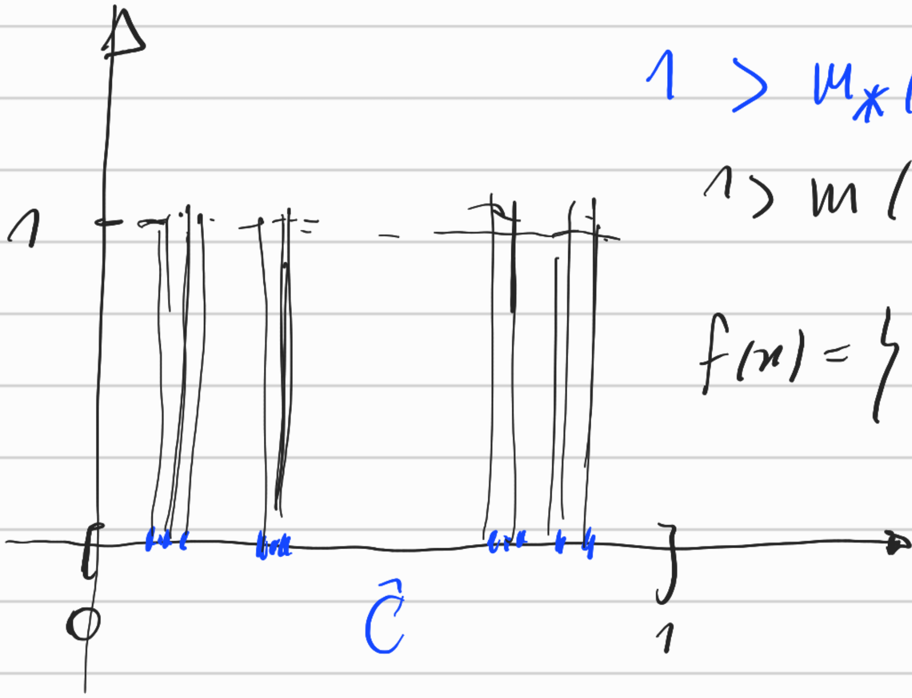
luego $\int_0^1 f_n(x)\,dx \overset{n}{\to} L \in [0,+\infty)$

Sin embargo existen ejemplos (Ej 4) de este tipo tales que $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ (el límite puntual) no es integrable Riemann.

Va a existir una noción de integral, más general que la integral de Riemann, tal que f será integrable y cumplirá que

$$\int_{[0,1]} f = L$$

2.

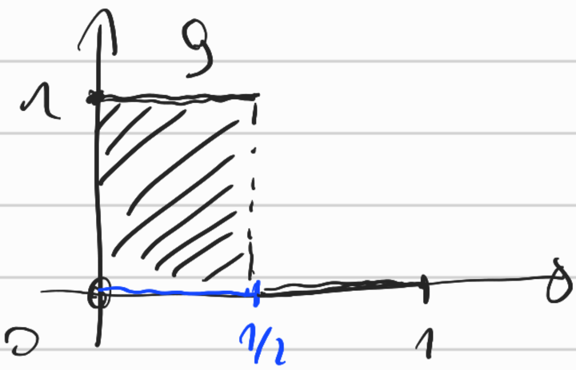


$1 > m_*(\hat{C}) > 0$

$1 > m(\hat{C}) > 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \hat{C} \\ 1 & \text{si } x \in \hat{C} \end{cases}$$

$m(\hat{C}) = \frac{1}{2}$ $\qquad \displaystyle\int_{[0,1]} f = m(\hat{C}) \cdot 1$



$$\int_{[0,1]} g = 1/2 \cdot 1$$

A_1

A_2

$\vdots$

A_n

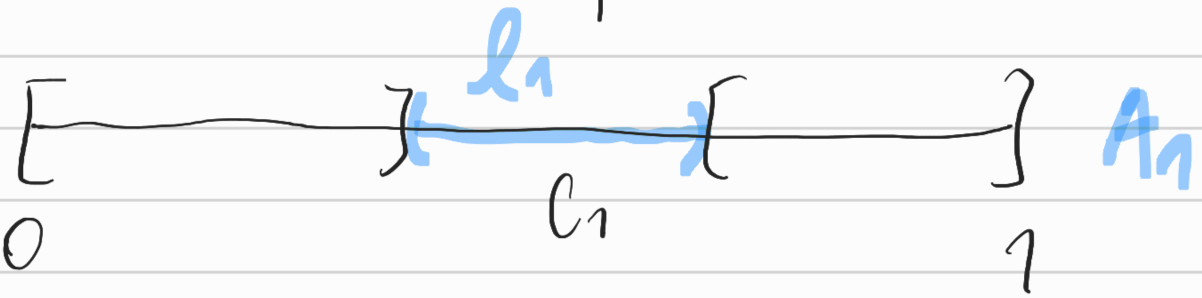
$C_n = [0,1] \setminus A_n \quad \forall n \geq 0$

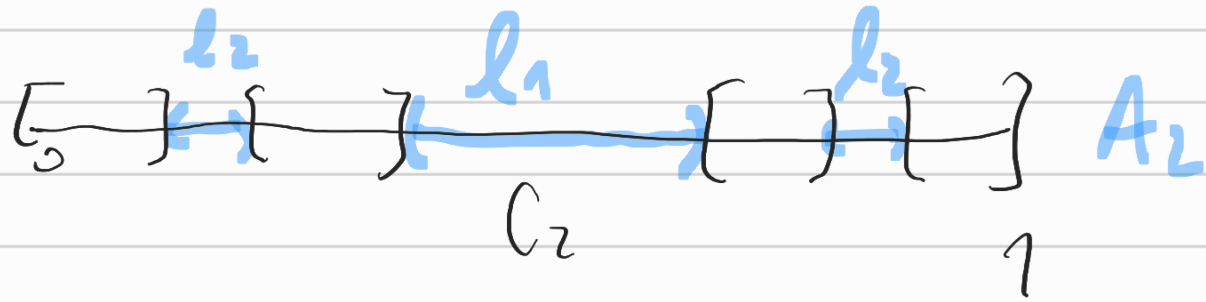
C_n es compacto $\forall n \geq 0$

$C_{n+1} \subset C_n \quad \forall n \geq 0$

Cantor usual: $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$

Cantor de medida positiva:





⋮

Cuántos intervalos de largo l_i saco en el paso i: 2^{i-1}

Elijo $(l_i)_i$ para que

$$l_1 + 2 l_2 + 2^2 l_3 + \dots = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{i-1} l_i < 1$$

A partir de esto probar que

$$m_*(\hat{C}) = 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{i-1} l_i$$

$$\bigcap_{n\geq 1} C_n \quad \text{donde } C_n = [0,1] \setminus A_n$$

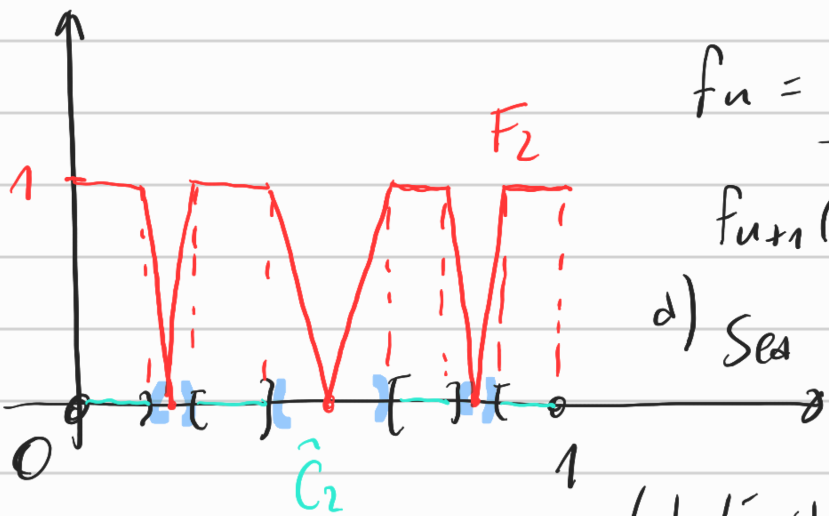
Def: $A \subset \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si:
$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, U$ abierto con $A \subset U$
tal que $m_*(U \setminus A) < \varepsilon$

Si $A \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue, $m(A) := m_*(A)$

Propiedades: Abiertos son medibles Lebesgue, es cerrada por complementos, uniones numerables, etc...

Ejercicio 4

$F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

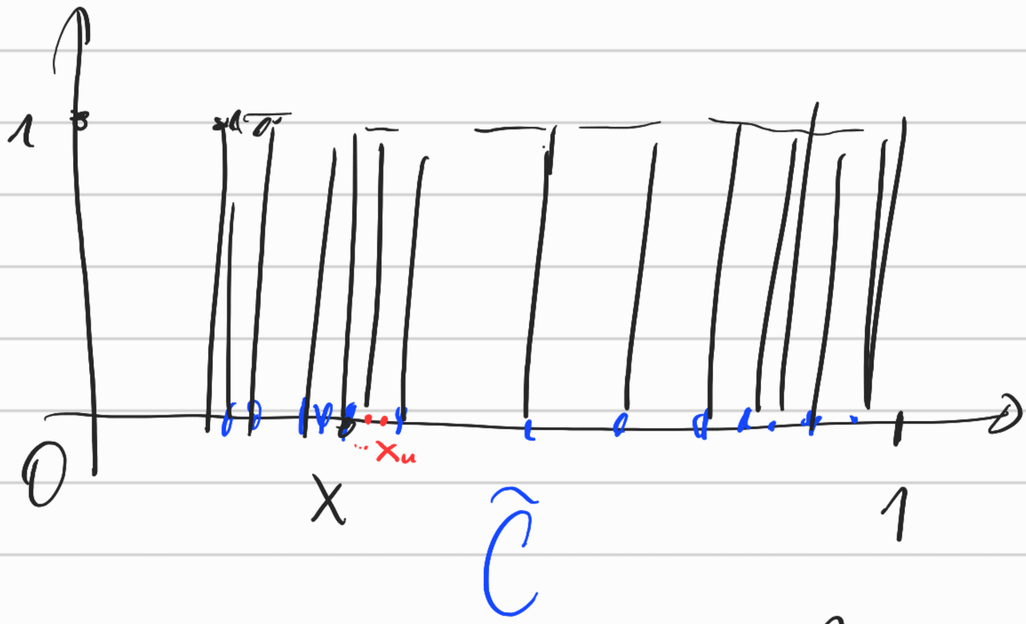


$f_n = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n$

$f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \forall n \quad \forall x \in [0,1]$

d) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lim_n f_n(x)$ (el límite existe porque para cada x es una suc. decreciente)

Ver que f es discontinua (al menos en) $\hat{C}$.



Ver que para todo $x \in \hat{C}$ existe

$x_n \xrightarrow{n} x$ con x_n punto medio de algún intervalo del complemento de $\hat{C}_n$.

Como $f(x) = 1$ y $f(x_n) = 0$ $\forall n$ concluimos que f no es cont. en x.

$$\frac{1 - l_1 - 2l_2}{4}$$

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^{N} 2^{i-1} l_i}{2^N} \xrightarrow{N} 0$$