Práctico 3

Rectas y planos

1. Hallar ecuaciones paramétricas y cartesianas de las siguientes rectas:
   a) pasa por el punto $(1,2,5)$ y es paralela al vector $(2,1,3)$;
   b) pasa por los puntos $(4,3,0)$ y $(1,0,1)$.

2. Sea $P=(x_0,y_0)$ y r la recta de ecuación $ax+by=c$, en el plano.
   a) Probar que la ecuación vectorial de r se puede escribir como $\begin{cases}(x,y)=(0,c/b)+t(-b,a), & \text{si } b\neq 0\\ (x,y)=(c/a,0)+t(-b,a), & \text{si } a\neq 0\end{cases}$.
   b) Recordando que la distancia entre un punto P y una recta r de ecuación $X=Q+tu$ es $d(P,r)=\frac{\|(P-Q)\times u\|}{\|u\|}$, deducir $d(P,r)=\frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3. Hallar la distancia entre el punto P y la recta r, en los casos siguientes.
   a) $P=(1,2,1)$ y r es la recta de ecuación $(x,y,z)=(1,1,1)+t(3,0,4)$.
   b) $P=O$ (el origen) y r es la recta de ecuación $y+1=x=\frac{1-z}{2}$.
   c) $P=(1,1)$ y r es la recta de ecuación $3x+4y=2$.
   d) $P=(3,7)$ y r es la recta que pasa por el origen y es paralela al vector $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$.
   e) $P=(2,1)$ y r es la recta que pasa por $(4,2)$ y $(10,5)$.

4. Sean $r:\ X=P+tu$ y $s:\ X=Q+tv$ las ecuaciones vectoriales de dos rectas no paralelas.
   Probar que la distancia entre r y s es $d(r,s)=\frac{|(P-Q)\cdot(u\times v)|}{\|u\times v\|}$.

   Sugerencia: Sea n la perpendicular común a r y s. Definimos $P_0:=n\cap r$ y $Q_0:=n\cap s$. Sea Q_1 tal que P,P_0,Q_0,Q_1 son los vértices de un rectángulo. Sea Π el plano determinado por Q,Q_0,Q_1 y n' la paralela a n por P.
   a) Probar que n es paralela al vector $w:=u\times v$.
   b) Probar que el plano Π es perpendicular a n'.
   c) Probar que la recta QQ_1 es perpendicular a n'.
   d) Deducir $d(r,s)=d(P_0,Q_0)=d(P,Q_1)$ y concluir $d(r,s)=\frac{|(P-Q)\cdot(u\times v)|}{\|u\times v\|}$.

5. Sean $r:\ X=P+tu$ y $s:\ X=Q+tv$ las ecuaciones vectoriales de dos rectas. Probar que r y s son coplanares si y solo si $(P-Q)\cdot(u\times v)=0$. *Sugerencia:* distinguir según r y s son paralelas o no.

6. Se consideran las siguientes rectas
$$r_1:\ \begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\\ z=-1+t\end{cases},\qquad r_2:\ \frac{x-1}{2}=2-y=z-1,\qquad r_3:\ (x,y,z)=(3,1,0)+t(1,0,1).$$
   a) Para cada par de esas rectas se pide investigar si son: paralelas, ortogonales[1] o coplanares.
   b) Hallar las distancias entre las rectas anteriores.

7. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes planos:
   a) Pasa por el punto $(1,1,1)$ y es paralelo a $u=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y $v=\mathbf{i}-\mathbf{k}$.
   b) Pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(2,2,3)$ y $(1,1,-2)$;
   c) Pasa por el punto $(1,1,1)$ y contiene a la intersección de los planos $x+y+z=-2$ y $x-y-z=2$

[1] Dos rectas se dicen *ortogonales* si lo son sus direcciones.

8. *a*) Hallar la ecuación vectorial de la intersección de los planos $2x - 3y + 4z = -1$ y $\begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = -1 - t + 2s \\ z = -2 - 2t - s \end{cases}$.

   b) Hallar la intersección del plano $\begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = -1 - t + 2s \\ z = -2 - 2t - s \end{cases}$ y la recta $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

9. En los casos siguientes se pide hallar la intersección de los tres planos; cuando la intersección sea vacía, estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.

   a) $y + z = 0,\ 2x - y - 2z = 5,\ 3x + 3y + 2z = 7$.

   b) $x + 2y - z = 2,\ 2x + y - 3z = 0,\ -2x - 4y + 2z = 3$.

   c) $x - 2y + z = 5,\ x + z = 3,\ x + 4y + z = 0$.

10. Sean $\Pi :\ ax + by + cz = d$ y $\Pi' :\ a'x + b'y + c'z = d'$ las ecuaciones de dos planos. Probar:

   a) Π y Π' son paralelos si y solo si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$.

   b) Π y Π' son ortogonales[2] si y solo si $aa' + bb' + cc' = 0$.

11. Hallar la distancia del origen al plano $x - y = 3$, y del punto $(-2, -4, 3)$ al plano $2x - y + 2z = -3$.

12. Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(10, 11, 12)$ y no corta a ninguno de los planos de ecuaciones $x + y + z = 1$, $x - y = 3$.

13. Verificar que los siguientes planos son paralelos, y hallar la distancia entre ellos.

   a) $x - 2y - 2z = 12$ y $-x + 2y + 2z = 6$;

   b) $2x - 3y + 6z = 14$ y $4x - 6y + 12z = -21$.

14. En cada caso, hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones especificadas.

   a) Pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + y + 3z - 1 = 0$.

   b) Pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, se intersecta con la recta $(x, y, z) = (1, -1, 3) + t(3, 2, -5)$ y es ortogonal a la recta $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$

   c) Pasa por el punto $(-4, -5, 3)$ e intersecta perpendicularmente a la recta $(x, y, z) = (-1, -3, 2) + t(3, -2, -1)$.

15. En cada caso, hallar la ecuación del plano que satisface las condiciones especificadas:

   a) Pasa por $(2, -1, 1)$, es perpendicular al plano $2x + 3y - z + 5 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z. \end{cases}$

   b) Pasa por $(1, 0, 1)$ y es paralelo al plano $x + 2y + z + 1 = 0$.

   c) Pasa por $(1, 1, 1)$, es paralelo al eje Oy y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje Ox (hay dos posibilidades).

16. Se consideran las rectas de ecuaciones $r_1 : \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5 + 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $\quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

   a) Encontrar la perpendicular común a r_1 y r_2.

   b) Calcular la distancia entre r_1 y r_2, y hallar los puntos $P_1 \in r_1$ y $P_2 \in r_2$ tales que $d(P_1, P_2) = d(r_1, r_2)$.

[2] Dos planos se dicen *ortogonales* o *perpendiculares* (en este caso es lo mismo), si sus vectores normales son ortogonales.