Teoría Electromagnética
Curso 2023

Práctico 2
Electrostática

1. Coordenadas cartesianas

a) Las aristas de una caja bidimensional cuadrada de lado $2a$ se encuentran a potenciales fijos. Determinar el potencial electrostático en la caja si dos caras opuestas están a potenciales V_0 y $-V_0$ y las restantes a potencial 0.

b) Un pozo rectangular está formado por un segmento de largo $2a$ a potencial $V(x)$ y dos lados semi-infinitos a potencial 0. Determine el potencial en el pozo si:

i) $V(x) = V_0$

ii) $V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < x < a \\ V_0 & a < x < 2a \end{cases}$

c) Un capacitor de placas paralelas infinitas (bi-dimensional) tiene un lado a potencial 0 y el otro también, salvo por un segmento de longitud $2a$, que se encuentra a potencial V_0. Determine el potencial dentro del capacitor.

d) Determine el potencial entre dos planos paralelos separados una distancia d, ambos a potencial cero salvo por un cuadrado de lado a en uno de ellos a potencial V_0.

Coordenadas esféricas

2. Dada la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0,$$

a) obtenga los coeficientes del desarrollo de las soluciones como series (de Frobenius)

$$y(x) = x^s \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

b) pruebe que las soluciones regulares en ambos extremos son polinomios ($P_l(x)$) de orden l, siendo l es entero. Se llaman Polinomios de Legendre al fijar $P_l(1) = 1$.

c) *Fórmula de Rodrigues.* Pruebe que el polinomio $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$ es el Polinomio de Legendre de orden l.

d) Pruebe la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}.$$

e) Escriba el desarrollo en polonomios de Legendre de las funciones

i) $f(x) = 1 - x^2$

ii)$f(x) = 1 - |x|$

en el intervalo $(-1, 1)$.

f) Los Polinomios de Legendre también se pueden obtener de la función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt-t^2}} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l.$$

Verifique explícitamente que la fórmula es correcta para $l = 0, 1$. Pruebe en general que los polinomios de esta fórmula cumplen la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre. *Ayuda: considere la serie de Maclaurin de* $f(u) = (1-u)^{-1/2}$ *y el teorema del binomio, eligiendo como binomio* $u = 2xt + t^2$.

3. Planteando el teorema de Green para las funciones $\phi(y) = G_D(x, y)$ y $\phi(y) = G_D(x', y)$ donde y es la variable de integración y x, x' son parámetros, pruebe que la función de Green para el problema de Dirichlet debe ser simétrica.

4. Desarrollo en armónicos esféricos

a) Demuestre que:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

donde:

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{\vec{x}.\vec{x}'}{|\vec{x}|\,|\vec{x}'|} \\ r_> &= \max\left(|\vec{x}|, |\vec{x}'|\right) \\ r_< &= \min\left(|\vec{x}|, |\vec{x}'|\right) \end{aligned}$$

b) Demuestre el teorema de adición de armónicos esféricos:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi)$$

donde $\cos\gamma = \cos(\theta)\cos(\theta') + \text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\theta')\cos(\phi - \phi')$.

c) Finalmente deduzca que la expansión de $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ en armónicos esféricos es:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi).$$

5. Un cascarón esférico está compuesto por 2 semiesferas a potenciales V_0 y $-V_0$ separadas por un material no conductor de ancho despreciable.

a) Determine la función de Green para resolver el problema exterior.

b) Exprese la solución del potencial en términos de las variables que se muestran en la figura 1.

c) Obtenga una expresión cerrada (resolviendo las integrales) para el potencial en el eje z.
d) Calcule los primeros términos del potencial desarrollándolo en series de potencias para $a/|x|$.

e) Escriba la función de Green de la parte a) como una expansión en armónicos esféricos, muestre que el potencial se reduce a una expansión en polinomios de Legendre y obtenga una expresión general para el potencial. Compare con el resultado obtenido en d).

f) Repita el cálculo anterior pero partiendo de una solución genérica de la ecuación de Laplace en el exterior.

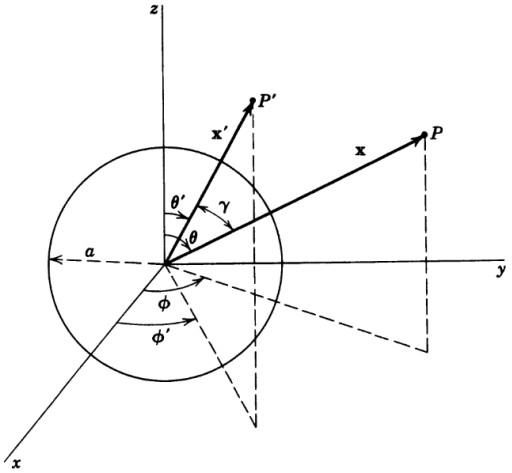

Figura 1: Coordenadas para expresar funciones de Green en esféricas.

6. Considere una carga q uniformemente distribuida en un aro de radio a.

a) Determine el potencial en el eje como una expnasión en polinomios de Legendre, usando coordenadas esféricas de acuerdo a la figura 2, donde el eje del aro coincide con el eje z y el centro del aro está en la posición $z = b$.

b) Determine el potencial en todo el espacio.

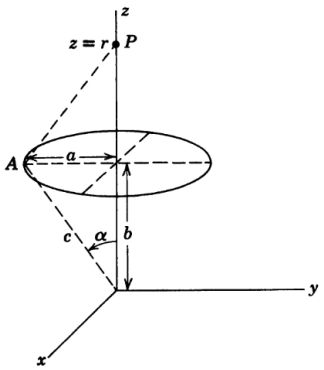

Figura 2: Aro cargado. *Imagen de J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (1999).*

7. Esferas concéntricas.

a) Demuestre que la función de Green para el problema de Dirichlet entre dos esferas concéntricas de radios a y b es:

$$G_D\left(\vec{x},\vec{x}'\right) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right).$$

b) Estudie los límites $a \to 0$, $b \to \infty$ y $a = cte$, $b \to \infty$. Interprételos.

8. Calcule el potencial debido a una cáscara esférica de radio a con densidad de carga uniforme σ_0 pero sin la parte correspondiente al interior de un cono θ_0 (un *mate* con densidad de carga uniforme) tanto dentro como fuera de la cáscara.

9. Calcule el potencial dentro de un cascarón esférico a potencial V_0 que contiene un dipolo $\vec{p}$ en el centro.

10. Un disco de radio a y cargado con carga Q distribuida uniformemente (ver figura 3), se ubica dentro de una esfera conductora de radio b, que se encuentra conectada a tierra. Los centros del disco y de la esfera coinciden.

a) Determine el potencial en todos los puntos del eje del disco.

b) Determine el potencial en todo el interior de la esfera.

c) Determine la densidad de carga inducida en la esfera.

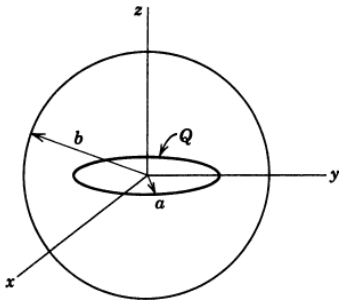

Figura 3: Disco cargado en esfera conductora.

11. Considere el sistema de la figura 4, formado por dos esferas conductoras concéntricas de radios a y b. Cada esfera está dividida en el ecuador en dos hemisferios y los cuatro hemisferios resultantes se mantienen a tierra y $+V$ según se indica en la figura.

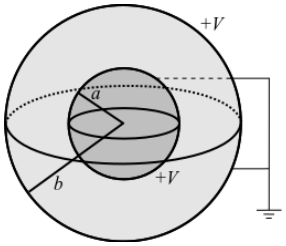

Figura 4: Esferas conductoras concéntricas.

a) Utilizando la función de Green adecuada, halle una expresión integral para el potencial entre las esferas.

b) Desarrollando los integrandos de la expresión anterior, obtenga una forma explícita del potencial (sólo se pide conservar términos a primer orden).

Coordenadas cilíndricas

12. Calcule el potencial en el interior de un cilindro circular recto de radio a y altura h si:

a) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$.

b) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0\,\mathrm{sen}(2\phi)$.

c) el potencial es cero en las tapas y V_0 (uniforme) en la superficie lateral.

d) el potencial es cero en las tapas y $V_0\frac{z(h-z)}{h^2}$ en la superficie lateral.

Nota: Recuerde que $\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)$, $\int x^3J_0(x)\,dx = 2x^2J_2(x) - x^3J_3(x)$.

Puntas y esquinas

13.* Considere la región bidimensional de la figura 5 determinada por $\rho \geq a$, $0 \leq \phi \leq \beta$, cuyos límites son superficies conductoras en $\phi = 0$, $\rho = a$, y $\phi = \beta$, a potencial 0. A grandes distancias el potencial está determinado por cierta configuración de cargas o conductores a potencial fijo.

a) Determine el potencial usando coordenadas polares.
b) Conservando sólo los términos de menor orden calcule el campo eléctrico y las densidades de carga sobre las superficies del borde.
c) Para $\beta = \pi$, muestre que lejos del centro el campo eléctrico es uniforme y perpendicular a la superficie.

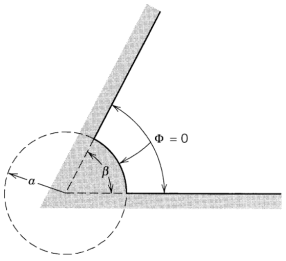

Figura 5: Pared conductora con esquina en ochava.

14.* Considere el problema electrostático de la figura , definido en un sector limitado por un cono de ángulo β (se muestran los casos que $\beta < \pi/2$ y $\beta > \pi/2$, para este último se obtiene una punta).

a) Separe las variables (r, θ) en la ecuación de Laplace. Muestre que sólo están presentes

en la solución las funciones de Legendre $P_\nu(\cos\theta)$ pero ν *no es necesariamente entero* [1].
b) Observe que los valores de ν están determinados por la condición $P_\nu(\cos\beta) = 0$. Obtenga la solución para el potencial del problema.
c) Calcule el campo eléctrico y estudie lo que sucede para $\beta > \pi/2$.

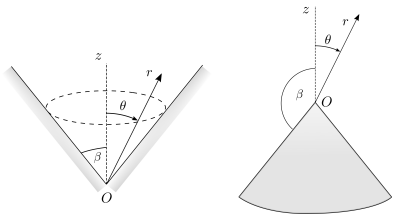

Figura 6: Esquina de paredes conductoras y punta cónica conductora.

[1] Ver Jackson, sec. 3.4 (p. 104)