

Fuerza y masa gravitatoria

La ley de gravitación universal establece que la fuerza gravitatoria que una partícula "1" provoca sobre una partícula "2" es de la forma:

$$\vec{F}_{g_{1/2}} = - G \frac{m_1^* m_2^* (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

donde $m_1^* > m_2^*$ es una propiedad de las partículas que llamamos masa gravitacional.

Por otro lado, consideremos la acción de esta fuerza sobre dos partículas debido a la tierra cuando éstas están sobre su superficie. Sabemos que la aceleración de ambas será la misma para ambas partículas, entonces, la 2^{da} ley de la mecánica Newtoniana dice que bajo la sola acción de esta fuerza es:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{a} &= - G \frac{m_T^* m_1^*}{R_T^2} \hat{e}_r \\ m_2 \vec{a} &= - G \frac{m_T^* m_2^*}{R_T^2} \hat{e}_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m_1^*}{m_1} = \frac{m_2^*}{m_2} = \frac{R_T^2}{G m_T^*} \overset{9,8 \text{ m/s}^2}{=} \text{cte!}$$

Por lo que concluimos que la masa gravitatoria e inercial son proporcionales. Por esto, simplemente fijamos el valor de $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ que implica que $m^* = m$ para todas las partículas.

La 2^{da} ley de la mecánica y su determinismo

En general, las fuerzas que nos encontramos en la naturaleza, o en los modelos, son de la forma $\vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$ lo cual para una partícula se traduce en:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t) \quad (1)$$

En muchos casos, si la forma funcional de $\vec{F}$ con $\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}$ y t no es patológica, conocer $\vec{r}(t_0)$ y $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ en algún instante de tiempo t_0 , la 2^{da} ley nos permite determinar completamente el movimiento futuro de la partícula. Es decir, hallar la ley horaria de la partícula.

A estas ecuaciones de evolución (1) se les denomina ecuaciones de movimiento.

Como regla general podemos recurrir a métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo construir, iterativamente, la solución a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} t_n = t_0 + n\Delta t \\ \vec{r}_n = \vec{r}(t_n) \\ \vec{v}_n = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{r}_n \approx \vec{r}_{n-1} + \vec{v}_{n-1} \Delta t \\ \vec{v}_n \approx \vec{v}_{n-1} + \frac{\vec{F}(\vec{r}_{n-1}, \vec{v}_{n-1}, t_{n-1})}{m} \Delta t \end{array}$$

Este método se denomina método de Euler. Es claro que se cometen errores, paso a paso, que se irán acumulando. La estabilidad del método es un tema importante en gral.

Existen muchos otros métodos (en gral mejores que el método de Euler), algunos de ellos los verán en otros cursos (Física computacional, por ejemplo).

Otras veces podemos resolver estas ecuaciones exactamente de forma analítica.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Fuerzas dependientes del tiempo



consideremos una fuerza $\vec{F}$ de la forma $\vec{F}(t) = F_x(t)\hat{i} + F_y(t)\hat{j} + F_z(t)\hat{k}$ de acuerdo a la 2^{da} ley será

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t) \\ m\ddot{y} &= F_y(t) \\ m\ddot{z} &= F_z(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Estas son las} \\ \text{ecuaciones de} \\ \text{movimiento} \end{array}$$

Una de las coordenadas cualquiera, digamos x , se halla integrando este problema:

$$\ddot{x} = \frac{F_x(t)}{m} \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d\dot{x}}{dt''} dt'' = \int_{t_0}^t \frac{F_x(t'')}{m} dt'' \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{F_x(t'')}{m} dt''}$$

Nuevamente integrando obtenemos que:

$$\int_{t_0}^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{t_0}^t \left\{ \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t'} \frac{F_x(t'')}{m} dt'' \right\} dt' \Rightarrow \boxed{x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \int_{t_0}^{t'} \frac{F_x(t'')}{m} dt'' \right\} dt'} \quad (*)$$

Por ejemplo, una carga q de masa m en un campo eléctrico externo de la forma $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \delta) \hat{k}$ y con condiciones iniciales $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$ dará lugar a la ley horaria:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}(t-t_0) \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}(t-t_0) \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}(t-t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \int_{t_0}^{t'} \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t'' + \delta) dt'' \right\} dt' \end{aligned}$$

Ya que $\vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \cos(\omega t + \delta) \hat{k}$

Integrando es:

$$z(t) = z_0 + v_{0z}(t-t_0) + \int_{t_0}^t \frac{qE_0}{m\omega} [\sin(\omega t' + \delta) - \sin(\omega t_0 + \delta)] dt'$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 + \frac{qE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t_0 + \delta) + \left(v_{0z} - \frac{qE_0}{m\omega} \sin(\omega t_0 + \delta) \right) (t-t_0) - \frac{qE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \delta)$$

Ejemplo 2: Fuerzas dependientes de la velocidad

Consideremos una fuerza de la forma $\vec{F}(\vec{v}) = F_x(v)\hat{i} + F_y(v)\hat{j} + F_z(v)\hat{k}$.

En gral, las fuerzas dependientes de la velocidad son típicamente resistivas o viscosas y por tanto son en la dirección de la velocidad:

$$\vec{F}(v) = -R(v) \hat{t}, \text{ donde } \hat{t} = \hat{v} \text{ es el vector tangente}$$

Separando, entonces el movimiento en la dirección de la velocidad y en las direcciones perpendiculares es:

$$m \ddot{s} = -R(\dot{s})$$

$$m K \dot{s}^2 = 0 \text{ que implica } K=0 \text{ o } \dot{s}=0$$

Es decir, la partícula está quieta o se mueve en línea recta.

La función $R(v)$ o $R(\dot{s})$ se suele estimar/deducir con ensayos aerodinámicos o similares.

$$\Rightarrow \frac{1}{R(v)} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{1}{R(v)} \frac{dv}{dt'} dt' = - \int_{t_0}^t \frac{1}{m} dt' \Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{1}{R(v)} dv = -\frac{t-t_0}{m}$$

sea $\tilde{F}(v) / \frac{d\tilde{F}(v)}{dv} = R(v)$ es decir $\tilde{F}$ es una primitiva de $(R(v))^{-1}$

$\Rightarrow \tilde{F}(v) = \tilde{F}(v_0) - \frac{t-t_0}{m}$ si logramos invertir esta relación obtendremos $v(t)$ como:

$$\boxed{v(t) = \tilde{F}^{-1} \left(\tilde{F}(v_0) - \frac{t-t_0}{m} \right)}$$

y a partir de allí será:

$$\boxed{s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t \overbrace{\tilde{F}^{-1} \left(\tilde{F}(v_0) - \frac{t'-t_0}{m} \right)}^{v(t') = \dot{s}(t')} dt'}$$

Por ejemplo, en mecánica de fluidos, cuando un objeto se mueve a través del fluido, éste experimenta una fuerza típicamente de la forma:

$$\vec{F}(\vec{v}) = -\frac{1}{2} \rho v^2 C_D A \hat{v} \quad \leftarrow \text{Lord Rayleigh (John William Strutt)}$$

donde A es el área transversal al movimiento,
 C_D se denomina coeficiente de arrastre,
y ρ es la densidad del fluido.

Resumimos esto en la forma: $\vec{F}(\vec{v}) = -b v^2 \hat{v}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(v) = \int \frac{1}{b v^2} dv = -\frac{1}{b v} \quad \text{es una primitiva de } \frac{1}{b v^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{b v} = -\frac{1}{b v_0} - \frac{t-t_0}{m} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{b}{m}(t-t_0)} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 b}{m}(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 b}{m}(t'-t_0)} dt'$$

$$\Rightarrow s(t) = s(t_0) + \frac{m}{b} \left[\ln\left(1 + \frac{v_0 b}{m}(t-t_0)\right) - \ln(1) \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = s(t_0) + \frac{m}{b} \ln\left(1 + \frac{v_0 b}{m}(t-t_0)\right)$$

Ejemplo 3: Fuerzas dependientes de la posición

11/11/17

Si tenemos una fuerza unidimensional $\vec{F} = f(x)\hat{i}$
 $\rightarrow$ será $m\ddot{x} = f(x)$. Multiplicando a ambos lados por $\dot{x}$
tenemos que

$$\dot{x} m \ddot{x} = \dot{x} f(x) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} \right) = \frac{dx}{dt} f(x)$$

sea $-U(x)$ una primitiva de $f(x)$. Es decir, $f(x) = -\frac{dU}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} \right) = -\frac{dx}{dt} \frac{dU}{dx} = -\frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0$$

¿Suena familiar?

En gral, en 3D no tiene porque existir $U / \vec{F} = -\nabla U$,
pero de existir será:

$$m \ddot{\vec{r}} = -\nabla U$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot m \ddot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}} \cdot \nabla U$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} \right) = - \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\frac{dU}{dt}$$

y, nuevamente, será

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} + U \right) = 0$$

Volviendo a $\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0$, esto implica:

$$\frac{m \dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{m \dot{x}_0^2}{2} + U(x_0) = E_0 = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \text{despejando tenemos que: } \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))}$$

$$\Rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))}} \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \pm \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))}} \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{t_0}^t 1 dt'$$

$$\Rightarrow \left[\pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))}} = t - t_0 \right] \quad (***)$$

Consideremos, por ejemplo el caso $f(x) = -kx$

Notando que $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ cumple que $f(x) = -\frac{dU}{dx}$

Podemos escribir ******* como:

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E_0 - \frac{kx'^2}{2}}} = t - t_0$$

$$\left(\pm \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \right) \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{kx'^2}{2E_0}}} = t - t_0$$

Haciendo el cambio de variable: $x' = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \sin \theta$

es $dx' = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \cos \theta d\theta$ $\theta(x(t_0)) = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E_0}} x(t_0)\right) \equiv \delta$
 $\theta(x(t)) = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E_0}} x(t)\right)$

$$\Rightarrow t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \int_{\delta}^{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E_0}} x(t)\right)} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\delta}^{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E_0}} x(t)\right)} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta$$

$\Rightarrow$ definiendo $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ vemos que

$$\omega_0(t - t_0) = \pm \left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E_0}} x(t)\right) - \delta \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \sin\left(\pm [\omega_0(t - t_0) + \delta]\right) = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \sin(\omega_0(t - t_0) + \delta)}$$

pero E_0 es función de x_0 y $\dot{x}_0$ y δ también:

$$E_0 = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}$$

$$\delta = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{m\dot{x}_0^2 + kx_0^2}} x_0\right) = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{kx_0^2}{kx_0^2 + m\dot{x}_0^2}}\right)$$

observación:

Si recordamos que la energía del oscilador armónico es $E_0 = \frac{kA^2}{2}$ siendo A la amplitud

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \pm A \sin(\omega(t - t_0) + \delta)}$$