**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

*Medida e Integración–Curso 2023*

# Práctico 2: Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$

Varios de los ejercicios están tomados del libro [RA]: "Real Analysis" de Stein y Shakarchi. Se sugiere consultarlo, dado que el libro contiene sugerencias y ejercicios relacionados que pueden ser de ayuda. Otros ejercicios tienen pre-requisitos de Topología, se indican con una [T].

1. (Ejercicio 5 de [RA]) Dado un conjunto $E$ en $\mathbb{R}^d$, definimos $\mathcal{O}_n$ mediante

$$\mathcal{O}_n = \{x \colon d(x, E) < 1/n\}.$$

   (a) Probar que si $E$ es compacto entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\mathcal{O}_n)$.
   (b) Dar contraejemplos a lo anterior cuando $E$ es cerrado y no acotado, y cuando es abierto y acotado.

2. Mostrar que no existe una medida de probabilidad[1] en $\mathbb{R}$ que sea invariante por traslaciones, pero sí existe en $[0, 1]$.

3. (Propiedades de invarianza de la medida de Lebesgue.)

   Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Para cada $h \in \mathbb{R}^d$ definimos $E_h = E + h = \{x + h \colon x \in E\}$ el *conjunto trasladado de $E$ por $h$* y para cada $\delta > 0$ definimos $\delta E = \{\delta x \colon x \in E\}$ el *conjunto dilatado de $E$ un factor $\delta$*.

   (a) Demostrar que $E_h$ y $\delta E$ son conjuntos medibles y que:
      (i) $m(E_h) = m(E)$.
      (ii) $m(\delta E) = \delta^d m(E)$.
      (iii) Si $B \subset \mathbb{R}^d$ es una bola de radio $r > 0$, entonces $m(B) = r^d m(B_1)$, donde $B_1$ es la bola de centro en el origen y radio unitario (Ejercicio 6 de [RA]).
   (b) Probar también que $-E = \{-x \colon x \in E\}$ es medible y que $m(-E) = m(E)$.

   Observación: Ver página 22 de [RA].

4. ([T]) Un subconjunto $A \subset [0, 1]$ se dice *residual* si contiene una intersección numerable de abiertos densos y se dice *magro* si está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío.

   Como consecuencia del *teorema de Baire*[2] el intervalo $[0, 1]$ es un *espacio de Baire*, es decir, cumple que la intersección numerable de abiertos densos en densa. En un espacio de Baire, un conjunto residual es 'grande' desde el punto de vista topológico, mientras que un magro es 'pequeño'. Sin embargo, desde el punto de vista de la medida estas nociones pueden diferir:

   (a) Construir un ejemplo de un conjunto magro $\mathcal{M}$ en $[0, 1]$ con medida de Lebesgue positiva en todo intervalo abierto[3].
   (b) Construir un ejemplo de un conjunto residual $\mathcal{R}$ en $[0, 1]$ con medida de Lebesgue cero.

   Sugerencia: En el Práctico 1 se contruyó un conjunto magro (un conjunto de Cantor) con medida de Lebesgue positiva. Considerar una sucesión creciente de conjuntos de Cantor de medida adecuada.

5. (Ejercicio 7 de [RA]) Si $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$ es un vector de coordenadas positivas (es decir, $\delta_i > 0$ para cada $1 \leq i \leq d$) definimos

$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_d x_d) \colon (x_1, \ldots, x_d) \in E\}.$$

   Probar que todo medible $E \subset \mathbb{R}^d$ cumple que $m(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_d m(E)$.

---

[1] Una medida se denomina *medida de probabilidad* si la medida de todo el espacio es 1.
[2] `https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_categor%C3%ADas_de_Baire`
[3] Es decir, tal que $m(\mathcal{M} \cap I) > 0$ para todo intervalo $I \subset [0, 1]$.

6. (Ejercicio 8 de [RA]) Sea $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ transformación lineal. Demostrar, usando el procedimiento que se indica a continuación, que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible entonces $L(E)$ también lo es:
   (a) Notar que si $E$ es compacto también lo es $L(E)$. Luego si $E$ es un conjunto $F_\sigma$[4] también lo es $L(E)$.
   (b) Como $L$ verifica que
   $$|L(x) - L(y)| \leq M|x - y|,$$
   para algún $M > 0$, podemos ver que la imagen por $L$ de un cubo de lado $\ell$ esta contenida en un cubo de lado $c_d M\ell$, con $c_d = 2\sqrt{d}$. De allí, si $m(E) = 0$ entonces $m(L(E)) = 0$. Finalmente, aplicar el Corolario 3.5 de [RA].

7. (Ejercicio 9 de [RA]) Construir un conjunto abierto $U \subset [0, 1]$ tal que $m(\partial \overline{U}) > 0$. Construir un ejemplo análogo en el plano.

8. (Corolario 3.3 en [RA]) Si $E_1, E_2, \ldots$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ decimos que $E_k \nearrow E$ si $E_k \subset E_{k+1}$ para todo $k$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Decimos que $E_k \searrow E$ si $E_{k+1} \subset E_k$ para todo $k$ y $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$.

   Supongamos que $E_1, E_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos medibles. Probar que:
   (a) Si $E_k \nearrow E$ entonces $E$ es medible y $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$.
   (b) Si $E_k \searrow E$ y $m(E_{k_0}) < \infty$ para algún $k_0 > 0$ entonces $E$ es medible y $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$.
   (c) En la parte anterior la hipótesis $m(E_{k_0}) < \infty$ para algún $k_0 > 0$ es necesaria. Es decir, dar un ejemplo de $E_k \searrow E$ con $m(E_k) = \infty$ para todo $k$ y tal que $m(E) \neq \infty$.

   Sugerencia: Para la parte a) escribir $E$ como la unión numerable de los conjuntos $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \setminus E_1$, $\ldots$, $F_k = E_{k+1} \setminus E_k$, $\ldots$ y luego usar la propiedad de aditividad numerable. Para la parte b) escribir $E_{k_0}$ como la unión numerable de $E$ y los conjuntos $G_k = E_k \setminus E_{k+1}$ para $k \geq k_0$.

9. **Lema de Borel-Cantelli** (Ejercicio 16 de [RA])

   Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una familia numerable de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^d$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Sea
   $$E = \limsup_{k\to\infty}(E_k) = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k\geq n} E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ para infinitos } k\}.$$
   Probar que $E$ es medible y que $m(E) = 0$.

10. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible tal que $m(E) > 0$. Probar que para todo $0 < \alpha < 1$ existe un intervalo abierto $I$ tal que
   $$m(E \cap I) \geq \alpha m(I).$$
   Sugerencia: Considerar un abierto $\mathcal{O}$ que contenga a $E$ y tal que $m(E) > \alpha m(\mathcal{O})$. Escribir $\mathcal{O}$ como la unión numerable de intervalos abiertos disjuntos y probar que alguno de estos intervalos cumple la propiedad deseada.

11. (a) Sea $F \subset (a, b)$ un conjunto medible tal que $F \cap (F + t) = \emptyset$. Mostrar que $2m(F) \leq (b - a) + |t|$.
   (b) Deducir que si $F \subset (a, b)$ cumple que $m(F) > \frac{b-a}{2}$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $t$ con $|t| < \delta$ se cumple que $F \cap (F + t) \neq \emptyset$.
   (c) Demostrar que si $E \subset \mathbb{R}$ es medible y tiene medida positiva, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta, \delta)$ vale que $E \cap (E + t) \neq \emptyset$.
   (d) Probar que lo anterior no es cierto en general para todo $E \subset \mathbb{R}$ de medida exterior positiva. Sugerencia: Ejercicio 7 del Práctico 1.

[4] Un conjunto es un $F_\sigma$ si es unión numerable de conjuntos cerrados.

12. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible tal que $m(E) > 0$. Mostrar que el conjunto diferencia $D = \{x - y \ : \ x, y \in E\}$ contiene un intervalo alrededor del origen.

13. Sea $(f_k)$ una sucesión de funciones medibles $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $|f_k(x)| < \infty$ para casi todo $x$. Mostrar que existe $(c_k)$ sucesión de reales positivos tal que $\frac{f_k}{c_k} \to 0$ c.t.p.

    Sugerencia: Tomar $c_k > 0$ tal que $m(\{x : |f_k(x)/c_k| > 1/k\}) < 2^{-k}$ y aplicar el lema de Borel-Cantelli.

14. Consideramos en $\mathbb{R}$ la $\sigma$-álgebra de Lebesgue que denotamos por $\mathcal{L}$ que es la completación[5] de la $\sigma$-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Sea $m$ la medida de Lebesgue y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.

    (a) Mostrar que $f$ es medible como función de $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$[6].

    (b) Mostrar que si para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$ cuya medida de Lebesgue es nula se cumple que $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, entonces $f$ es medible como función de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

    (c) Mostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un difeomorfismo $C^1$ entonces es medible de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

    (d) Usar el hecho de que el cardinal de los borelianos es el mismo que el de $\mathbb{R}$ para deducir lo siguiente: Si una biyección $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica que $m(f^{-1}(C)) > 0$ para $C$ un conjunto cuyo cardinal es $\mathbb{R}$ y tal que $m(C) = 0$, entonces $f$ no es medible como mapa de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

    (e) Sea $K$ un conjunto de Cantor de medida positiva en $[0,1]$ y sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica que $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus K$, se anula en $K$ y $\varphi(x) > 1$ si $|t| > 2$. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$.

        (i) Mostrar que $f$ es un homeomorfismo de clase $C^1$ pero su inversa no es de clase $C^1$ (por tanto no es un difeomorfismo). Deducir que $f(K)$ es un conjunto de Cantor, en particular, no numerable.

        (ii) Mostrar que $f(K)$ tiene medida de Lebesgue cero (Sugerencia: Fijado $\varepsilon > 0$ considerar un cubrimiento de $K$ por intervalos de forma que la suma de sus longitudes sea menor que $2m(K)$ y de forma que todos esten contenidos en donde $\varphi$ es menor que $\varepsilon$).

        (iii) Deducir que $f$ no es medible como mapa de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

15. ([T]) Sea $\mathcal{B}_{[0,1]}$ la $\sigma$-álgebra de Borel y $\mathcal{L}_{[0,1]}$ la familia de los conjuntos medibles (que también forman una $\sigma$-álgebra). Sabemos que todo boreliano es medible, es decir, $\mathcal{B}_{[0,1]} \subset \mathcal{L}_{[0,1]}$. Probaremos que esta inclusión es estricta.[7]

    Sean $C_1, C_2 \subset [0,1]$ dos conjuntos de Cantor tales que $m(C_1) = 0$ y $m(C_2) > 0$, y sea $h : [0,1] \to [0,1]$ un homeomorfismo tal que $h(C_1) = C_2$. Sea $N \subset C_2$ un conjunto no medible y $X = h^{-1}(N)$. Probar que $X$ es medible y no es un boreliano.

16. (Problema 1 de [RA]) Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Mostrar que existen infinitas fracciones reducidas $\frac{p}{q}$ tales que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

    Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto de $x \in \mathbb{R}$ tales que existen infinitas fracciones reducidas $\frac{p}{q}$ que cumplen

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

    tiene medida cero.

[5] Una $\sigma$-álgebra es completa con respecto a una medida, si para todo conjunto de medida nula, todos sus subconjuntos forman parte de la $\sigma$-álgebra.

[6] Es decir, probar que $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

[7] Todo conjunto de medida exterior nula es medible, y eso implica que todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible. Como existen conjuntos medibles de medida nula no numerables (por ejemplo un conjunto de Cantor) entonces $\#\mathcal{L}_{[0,1]} = \#\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Se puede probar que $\#\mathcal{B}_{[0,1]} = \#\mathbb{R}$ y esto da otra demostración de que la inclusión es estricta. Ver libro de Folland, pág 39.