Práctico 4

Número complejo

1. Expresar los siguientes complejos en la forma $a + bi$:

   (a) $(1+i)^2$

   (b) $\frac{1}{i}$

   (c) $\frac{1}{1+i}$

   (d) $(2+3i)(3-4i)$

   (e) $(1+i)(1-2i)$

   (f) $i^5 + i^{16}$

   (g) $1 + i + i^2 + i^2 + i^3$

   (h) $\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-8})$

2. Calcular los módulos de los números complejos siguientes:

   (a) $1+i$

   (b) $3+4i$

   (c) $(1+i)(1-i)$

   (d) $1+i+i^2$

   (e) $i^7 + i^{10}$

   (f) $2(1-i)+3(2+i)$

3. En cada caso, determinar todos los números complejos z que satisfacen la relación dada.

   (a) $z = \overline{z}$

   (b) $z^2 = \overline{z}^2$

4. Construir una representación del conjunto de todos los z del plano complejo que satisfagan cada una de las condiciones siguientes:

   (a) $|z| < 1$

   (b) $z + \overline{z} = 1$

   (c) $z - \overline{z} = i$

5. Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales.

   a) Demostrar que vale $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

   b) Utilizar la parte *a*) para probar que si α es una raíz compleja de $p(x)$, entonces $\overline{\alpha}$ también es raíz de $p(x)$.

   c) Deducir que si α es una raíz compleja no real de $p(x)$, entonces el polinomio $p(x)$ es divisible por el polinomio $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$. Notar que $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})\,x + |\alpha|^2$ es un polinomio con coeficientes reales.

6. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$ sabiendo que admite la raíz $1+2i$. Factorizar el polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ (los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente).

7. *a*) Expresar en notación binómica: $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $3e^{\pi i}$, $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}$.

   b) En cada uno de los casos siguientes, hallar todos los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la relación dada:

$$x + iy = xe^{iy}; \qquad e^{x+iy} = -1.$$

8. Calcular el módulo y el argumento principal de cada uno de los números complejos siguientes:

   (a) $2i$

   (b) $-3i$

   (c) -1

   (d) 1

   (e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

   (f) $\frac{1}{(1+i)^2}$

9. Utilizar las fórmulas de De Moivre para calcular $\cos(3\varphi)$ y $\operatorname{sen}(3\varphi)$ en función de $\cos(\varphi)$ y $\operatorname{sen}(\varphi)$.

10. Probar las *fórmulas de Euler*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{R}.$$

Soluciones (de los ejercicios de cálculo)

1. (a) $2i$
   (b) $-i$
   (c) $1/2 - 1/2i$
   (d) $18 + i$
   (e) $3 - i$
   (f) $1 + i$
   (g) -1
   (h) $1 + i$

2. (a) $\sqrt{2}$
   (b) 5
   (c) 2
   (d) 1
   (e) $\sqrt{2}$
   (f) $\sqrt{65}$

3. (a) $\mathbb{R}$.
   (b) $\mathbb{R} \cup i\,\mathbb{R}$.

4. (a) Disco centro 0 y radio 1.
   (b) Recta vertical $x = 1/2$.
   (c) Recta horizontal $y = 1/2$.

5.

6. Raíces: $1 + 2i,\ 1 - 2i,\ i,\ -i$.
   Factorización en $\mathbb{R}$: $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 1)$. Factorización en $\mathbb{C}$: $(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)(x - i)(x + i)$.

7. *a*) $i,\ -3,\ -i$.
   b) x cualquiera, $y = 0$; $x = 0$, $y = (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

8. Módulo, argumento principal.
   (a) $2,\ \pi/2$
   (b) $3,\ 3\pi/2$
   (c) $1,\ \pi$
   (d) $1,\ 0$
   (e) $1,\ \pi/4$
   (f) $1/2,\ 3\pi/2$

9. $\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\operatorname{sen}^2(\varphi)$; $\quad \operatorname{sen}(3\varphi) = 3\cos^2(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi) - \operatorname{sen}^3(\varphi)$.

10.

11.