Práctico 3: Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad[1]

Variables Aleatorias Discretas

1. La variable aleatoria X toma los valores $0, 1, 2$ y 4, con probabilidades $1/2, 1/4, 1/8$ y $1/8$. Hallar la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria, y dibujar el gráfico de $y = F(x)$.

2. Se tira una moneda 6 veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que aparezca cara:

(a) por lo menos una vez;

(b) no menos de dos veces;

(c) de 3 a 5 veces.

3. En la trasmisión de un mensaje compuesto por signos, la probabilidad de que ocurra un error en un signo es 0,1. Calcular la probabilidad de que, en un mensaje con 4 signos:

(a) no hayan errores;

(b) ocurra un error;

(c) ocurra no menos de un error.

4. (Aproximación Binomial-Poisson) Sea X una variable aleatoria con distribución Binomial de parámetros n y p_n tales que $np_n \to \lambda$ cuando $n \to +\infty$. Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_n \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

es decir, la distribución Binomial se puede aproximar por la Poisson de parámetro λ.
Sugerencia: utilizar la Fórmula de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ si $n \to \infty$.

5. La probabilidad de acertar en un blanco es de $0,001$. Calcular la probabilidad de acertar en el blanco dos o mas veces, en una serie de 5000 disparos.

6. En una compañía de seguros hay asegurados 50.000 personas, de una cierta edad y grupo social. La probabilidad de defunción en el curso de un año, para cada individuo, es 0,006. Cada persona asegurada paga, al inicio del año, 40 dólares, y en caso de fallecer, sus parientes reciben de la compañía 5000 dólares. Calcular la probabilidad de que, en el lapso de un año, dicha compañía:

(a) sufra pérdidas;

(b) obtenga ganancias de por lo menos 300.000 dólares;

(c) obtenga ganancias de por lo menos 800.000 dólares.

7. Una urna contiene 6 bolas numeradas del 1 al 6. Se eligen al azar, y sin remplazo, 3 bolas. Sea X la variable aleatoria que indica el mayor de los números obtenido en las bolas elegidas. Hallar la función de distribución de la variable aleatoria X, y calcular $\mathbf{P}(X \geq 5)$.

[1] *Para trabajar en las semanas 4 y 5.*

Esquema de Bernoulli

8. Calcular la probabilidad de que, en $2n$ experimentos en un esquema de Bernoulli, se obtengan éxitos únicamente en los n experimentos con número par, si la probabilidad de éxito en un experimento es p.

9. *La variable aleatoria geométrica.* Dada una serie de experimentos de Bernoulli, con probabilidad de éxito p, sea T el número de experimentos necesarios hasta obtener un primer éxito.

(a) Verificar que el recorrido de T es $\{1, 2, \dots\}$ y calcular $\mathbf{P}(T = k)$ para $k \in \{1, 2, \dots\}$.

(b) Demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = k) = 1$. Esto demuestra que la probabilidad está bien definida.

(c) *Pérdida de memoria:* probar que

$$\mathbf{P}(T > n + m | T > n) = \mathbf{P}(T > m) \ \forall n, m \in \{1, 2, \dots\}$$

Es decir, si en el paso n no tuvimos éxito, es como que empezáramos nuevamente.

10. Considere un esquema de Bernoulli de n experimentos en donde la probabilidad de éxito es p. Calcular la probabilidad de que, en el experimento que ocupa el k-ésimo lugar, ocurra éxito por ℓ-ésima vez $(0 < \ell \leq k \leq n)$.

Variables Aleatorias Continuas

11. La variable aleatoria X tiene densidad $p(x) = ce^{-|x|}$.

(a) hallar el valor de la constante c;

(b) calcular $\mathbf{P}(0 \leq X \leq 1)$.

12. La variable aleatoria X tiene densidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de c.

(b) Hallar la función de distribución de X.

(c) Calcular la probabilidad $\mathbf{P}(0{,}1 < X < 0{,}4)$.

13. Una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$, se denomina *distribución de Rayleigh*. Hallar la densidad de esta variable aleatoria, y calcular la probabilidad $\mathbf{P}(0 \leq X \leq \sigma)$.

14. Verificar, que la función dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}, & x > b, \\ 0, & x < b. \end{cases}$$

donde a y b son constantes positivas, es la densidad correspondiente una variable aleatoria, y calcular su función de distribución correspondiente. (Esta distribución se denomina *distribución de Pareto*.)

15. La variable aleatoria U tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Demostrar que la variable aleatoria $X = 2U - 1$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(-1,1)$.

16. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$ continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.

17. Consideremos una variable aleatoria U con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, y sea $F(x)$ una función de distribución continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$, donde F^{-1} denota la función inversa de la función F, tiene función de distribución $F(x)$.

18. Consideremos una variable aleatoria X, con distribución normal, con parámetros $(2, 3/2)$. Calcular las siguientes probabilidades: (a) $\mathbf{P}(X \geq 3)$; (b) $\mathbf{P}\big(1 \leq X \leq 4\big)$; (c) $\mathbf{P}(|X - 2{,}5| \geq 0{,}5)$; (d) $\mathbf{P}\big((X-1)^2 \leq 4\big)$.

19. La variable aleatoria X tiene distribución normal con parámetros $(3,4)$. (a) Calcular las probabilidades $\mathbf{P}(X < 0)$ y $\mathbf{P}(-9 < X < 1)$. (b) Hallar el valor de x que cumple la condición $\mathbf{P}(X > x) = 0{,}01$.

20. (a) Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$. Demostrar que

$$\mathbf{P}(X > x + y \mid X > x) = \mathbf{P}(X > y). \tag{1}$$

Esta propiedad se denomina *pérdida de memoria*.

(b) Sea $G\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ una función real, que verifica $G(0) = 1$, y cumple la ecuación funcional

$$G(x+y) = G(x)G(y) \text{ para todo } x \geq 0,\ y \geq 0.$$

(i) Demostrar que $G(x) = G(1)^x$ para todo x racional. (ii) Demostrar que si además la función $G(x)$ es decreciente, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $G(x) = e^{-\alpha x}$. (iii) Concluir que una variable aleatoria que cumple la propiedad (1) tiene distribución exponencial.

21. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$ y densidad $p(x)$. Hallar la función de distribución y la densidad de la variable aleatoria $Y = aX + b$, donde $a > 0$ y b son constantes.

22. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$. Hallar las funciones de distribución de las variables aleatorias $Y = X^3$ y $Z = -X$.