Práctico 3

1. Una membrana cuadrada con extremos fijos de lado a vibra en su frecuencia fundamental con amplitud A en su centro. (a) Encuentre la ecuación para la amplitud promedio (espacial). (b) Encuentre la ecuación que da la ubicación de los puntos que oscilan con amplitud $0{,}5A$. (c) Halle numéricamente algunos puntos con la ecuación hallada anteriormente y grafíquelos.

2. Una membrana con extremos fijos está hecha de un material con densidad 1,0 kg/m^2 y se estira con una tensión de 1000 N/m. Si se busca que la membrana tenga una frecuencia fundamental de $250Hz$: (a) ¿Cuál debería ser la longitud de los lados si la membrana fuera cuadrada? (b) ¿Cuál debería ser el radio si la membrana fuera circular? (c) Calcule la frecuencia de los primeros 2 sobretonos para las partes a) y b).

3. Considere una membrana rectangular homogénea de lados L_1y L_2. Llamamos $z(x, y, t)$ a la altura de la misma en un punto de coordenadas (x, y) en el instante t. Suponga la velocidad de propagación de las ondas en la membrana igual a c y que los 4 lados están fijos. (a) Halle las frecuencias de los modos normales. (b) Suponga que $L_1 = L_2$. Para los 6 modos normales con menor frecuencia, dibuje las líneas nodales. (c) Suponga nuevamente que L_1y L_2son arbitrarios (no necesariamente iguales). Se suelta el borde $x = L_1$ de la membrana y se la hace vibrar de la forma $z(L_1, y, t) = Asen\left(\frac{\pi y}{L_2}\right) cos(\omega_F t)$, dejando los bordes $x = 0$, $y = 0$ e $y = L_2$ fijos. Determine la solución para $z(x, y, t)$ luego del régimen transitorio (es decir, existe un amortiguamiento que, pasado el transitorio, es despreciable), suponiendo $\omega > \frac{c\pi}{L_2}$. (d) Determine los ω para los cuales hay resonancia.

4. A una membrana cuadrada de lado π, densidad superficial ρ, tensión uniforme T y fija en sus extremos, se le impone una forma y una distribución de velocidades iniciales dada por:

$$z(x, y, 0) = z_0(x, y) = 3sen(x)sen(2y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, 0) = u_0(x, y) = 5sen(3x)sen(4y)$$

¿Cuál es el movimiento resultante?

5. Una membrana rectangular con extremos fijos tiene dimensiones L_x y $L_y$tal que los modos (3,1) y (2,2) están degenerados. La membrana tiene una tensión T y una densidad superficial σ. (a) ¿Cuál es la razón de los lados de la membrana $\frac{L_y}{L_x}$? (b) ¿Existe algún otro modo con frecuencia $f_{3,1} = f_{2,2}$? ¿Existe alguna otra frecuencia degenerada? Justifique. (c) Si la membrana se pone en movimiento en el punto $\left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2}\right)$ con una frecuencia $f_{3,1} = f_{2,2}$, ¿qué modo de estos se excitará? (d) Sabiendo que la membrana oscila en una combinación del modo fundamental y el modo $(3,1)$, y que cada modo tiene la misma energía. Calcule el cociente de las amplitudes de los modos $\frac{A_{3,1}}{A_{1,1}}$.

6. Una membrana cuadrada con lados de longitud L, densidad superficial ρ y tensión uniforme T, está fija por tres de sus lados y libre en el otro. (a) Escriba una expresión general para las frecuencias naturales. (b) Encuentre la solución general.

7. Halle la expresión para la energía de una membrana rectangular con extremos fijos de lados a y $b$que oscila en un modo normal.

8. Se tensa una membrana rectangular de lados ay b de forma que las tensiones en cada dirección no son iguales, siendo T_1en la dirección x y T_2 en la y. Demuestre que la ecuación de movimiento es:

$$T_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

9. Una membrana circular con extremos fijos, de radio $1\,cm$ y densidad 0,2 kg/m^2 se estira con una tensión de 4000 N/m. Vibrando con su frecuencia natural, la amplitud en el centro es de $0{,}01cm$. (a) Halle la frecuencia fundamental. (b) ¿Cuál es el máximo volumen de aire desplazado por la membrana?

10. Obtenga la energía total de una membrana circular con extremos fijos de radio a, tensión T y densidad superficial ρ que vibra en su modo fundamental como función de la amplitud de ese modo.

11. Escriba la expresión general para los modos normales de una membrana circular con su borde libre. Para los 3 modos con frecuencias más bajas, expréselas en función de la tensión y la densidad superficial y bosqueje las líneas nodales.

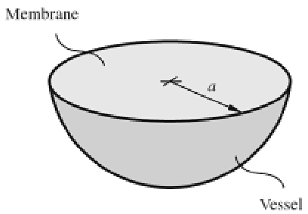
12. Considere una membrana circular de radio a de borde rígidos, densidad superficial de masa ρ y sometida a una tensión por unidad de longitud $\vec{T}$ constante. (a) Utilizando el método de separación de variables, hallar la solución general de la ecuación de ondas. (b) Las condiciones iniciales para la membrana están dadas por:

$$z(r, t = 0) = AJ_0\left(\frac{j_{01} r}{a}\right)$$
$$\frac{\partial z(t = 0)}{\partial t} = 0$$

Hallar el desplazamiento promedio de la membrana y su energía cinética media si $a =$ 15 cm, $\rho = 0{,}2\, kg/m^2$, $|\vec{T}| = 1500$ N/m y $A = 2 \times 10^{-3}\, m$.

13. (a) Considere una membrana circular excitada por una presión uniformemente distribuida en acimut de la forma $P = P_0 cos(\omega t)$. Encuentre la solución para el desplazamiento de la membrana. (b) Asuma ahora que la membrana tiene un coeficiente de amortiguamiento b. Halle las soluciones.

14. Halle y grafique la forma de una membrana circular forzada uniformemente cuando la frecuencia del forzante es: (a) La mitad de la frecuencia natural del sistema. (b) El doble de la frecuencia natural del sistema.



15. *El timbal*: Un timbal puede ser modelado como una cavidad hemisférica cerrada por una membrana de radio $a$que confina al aire en su interior, de tal forma que el movimiento de la membrana cambiará el volumen total del hemisferio, y por ende la presión del aire contenido. (a) Suponiendo que este cambio de volumen se da mediante un proceso adiabático, encuentre cuál es el cambio de presión del aire confinado, aproximando a primer orden. (b) Asumiendo que la presión hallada en la parte anterior actúa como forzante de la membrana, escriba su ecuación de movimiento. (c) Plantee separación de variables para encontrar la ecuación de la parte espacial, notando que, si se trabaja en coordenadas cilíndricas, la parte acimutal debe ser periódica. (d) Notando que los modos asimétricos no cambian el volumen total confinado debido a la forma de la parte acimutal, diferencie las posibles modificaciones que sufre la ecuación para el término radial. (e) La solución general puede ser hallada sumando la solución del caso asimétrico más otro término, de tal forma que se cumplan las condiciones de borde. ¿Cuál es este otro término? (f) Por sustitución de la solución general en el caso simétrico, halle la ecuación que da las frecuencias normales del sistema. Pueden ser útiles las relaciones $\int_0^z J_0(\eta)d\eta = zJ_1(z)$ y $J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z) = \left(\frac{2m}{z}\right)J_m(z)$

16. Considere la vibración transversal de pequeñas amplitudes de una membrana. (a) Tanto para membranas circulares como rectangulares, establezca las condiciones de borde en los casos: (i) Extremos fijos. (ii) Extremos libres. (b) En el caso particular de una membrana circular de radio R, densidad σ y tensión T, halle los modos normales y dibuje las líneas nodales de los 5 modos con frecuencias más bajas el caso de extremos fijos. (c) En el caso de una membrana rectangular de lados L_x y L_y, halle la oscilación resultante cuando actúa un forzante por unidad de superficie, uniforme y con frecuencia ω_F en el caso de extremos fijos.

Pueden ser útiles las raíces de las funciones de Bessel J_m:

k	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178