06 –MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

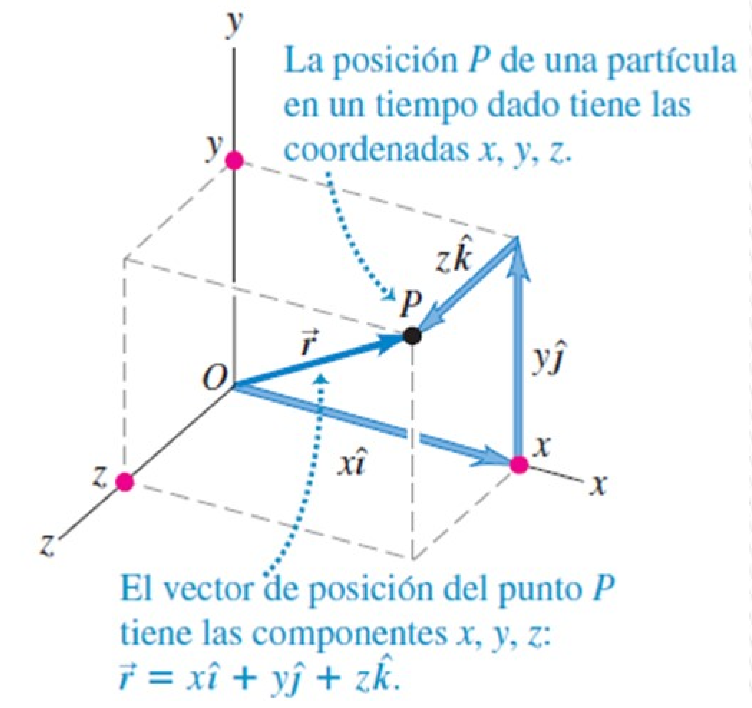
Repaso clase pasada

Salto alto como aplicación de movimiento rectilíneo con aceleración constante.

Vectores: propiedades, operaciones con vectores, módulo de un vector, componentes y vectores unitarios.

Cinemática en más de una dimensión.

Vector posición de una partícula en un instante dado es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto *P*. Coordenadas *x*, *y* y *z* de *P* son las componentes *x*, *y* y *z* del vector.



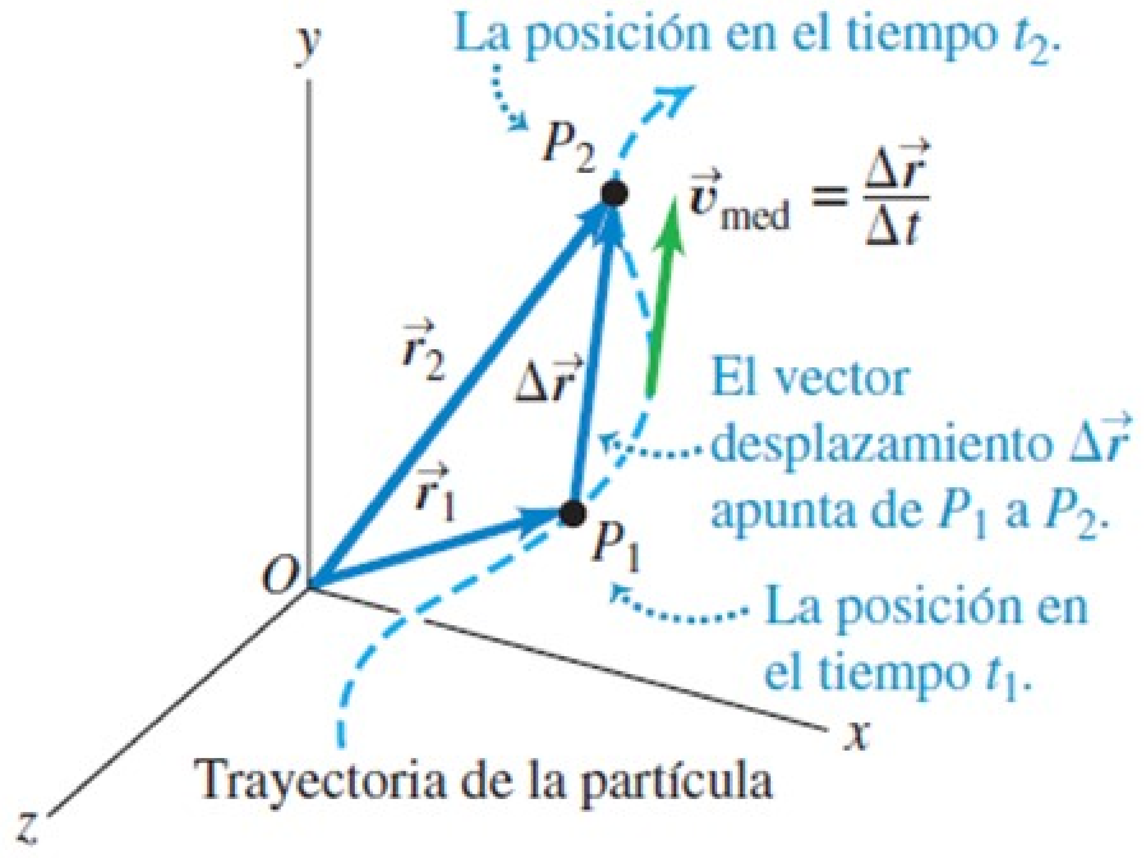
$$\bar{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

Repaso clase pasada

En un Δt la partícula se mueve de P_1 a P_2.

Desplazamiento: $\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$



Velocidad media durante ese intervalo Δt:

$$\bar{v}_{med} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1}$$

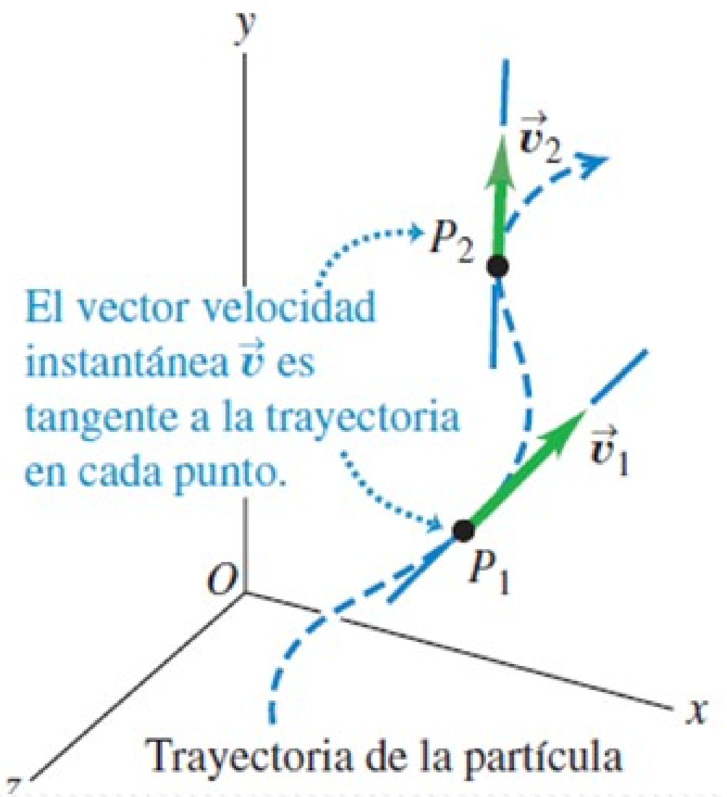
Rapidez media: es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo insumido.
Es un escalar y no siempre coincide con el módulo de la velocidad media.

Repaso clase pasada

Velocidad instantánea:

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

$$\overline{v} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$



$$\overline{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

El cualquier punto de la trayectoria, el vector es tangente a la trayectoria en ese punto, y el sentido es el del movimiento.

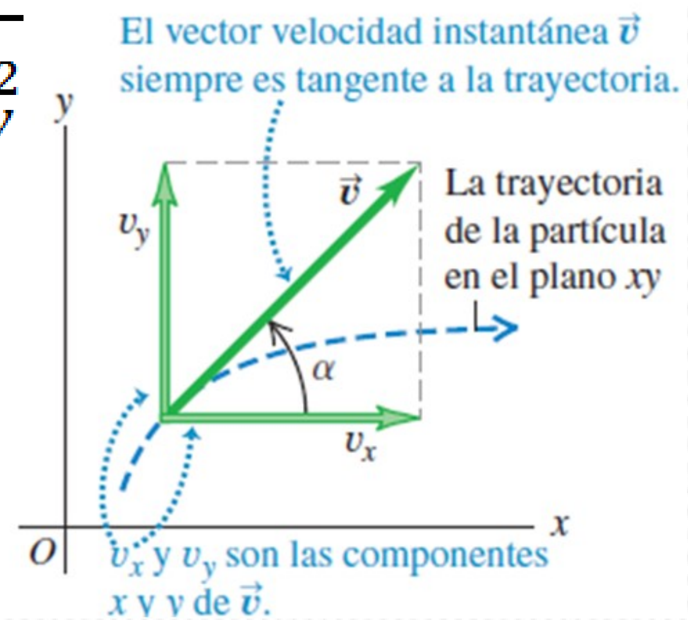
El módulo de **v** es la **rapidez.**

$$|\overline{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

En dos dimensiones:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

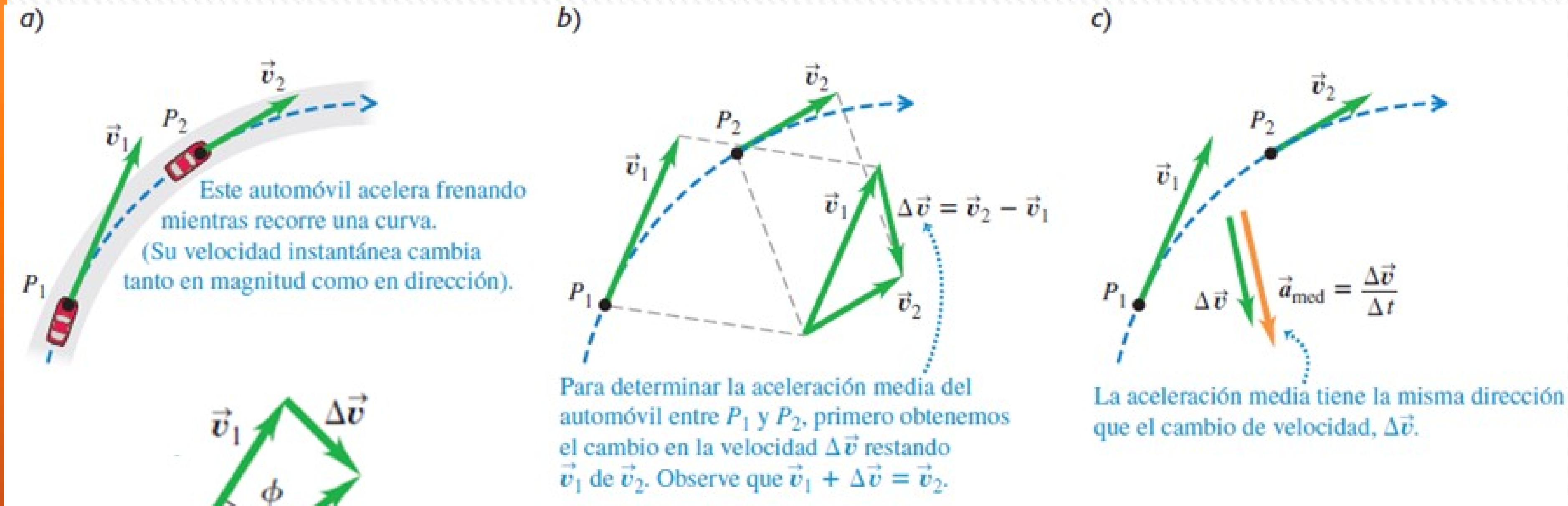
$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

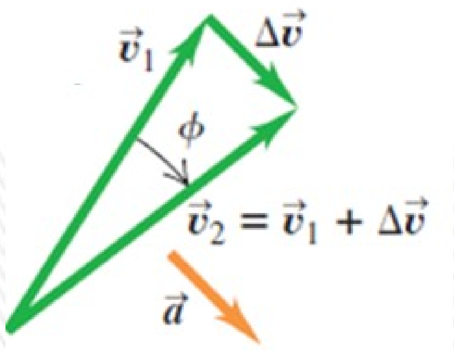


VECTOR ACELERACIÓN

***La aceleración* describe cómo cambia la velocidad.**

Velocidad como vector: aceleración describe cambios *tanto en la magnitud de la velocidad (es decir,* la rapidez) *como en la dirección de la velocidad (la dirección en que se mueve* la partícula).

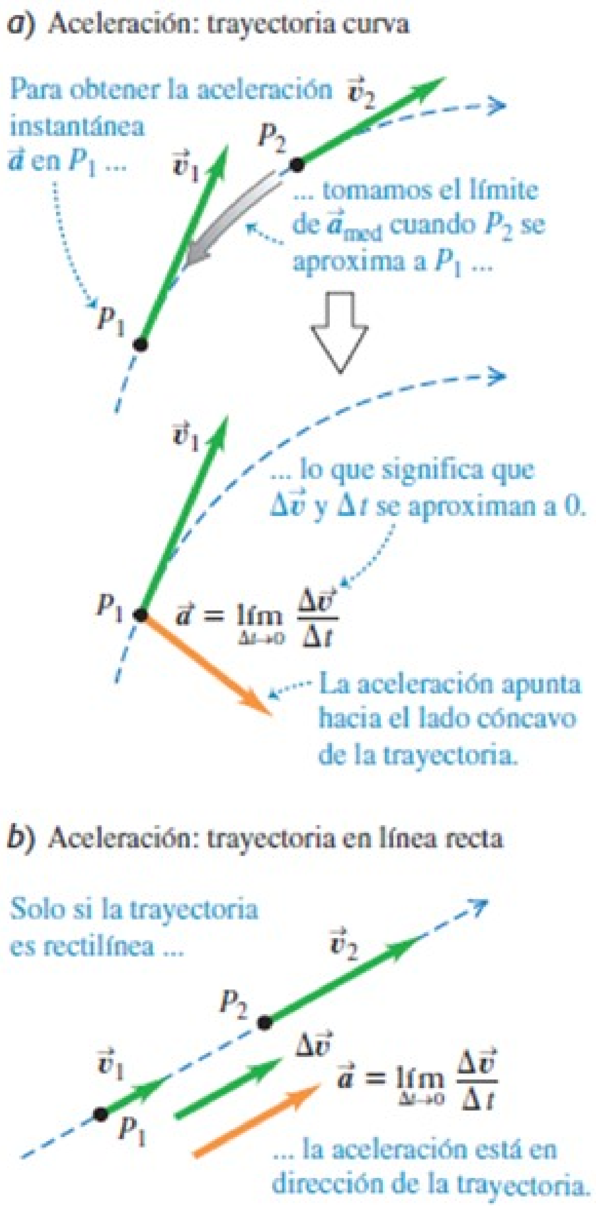




$$\bar{a}_{med} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Definimos la **aceleración media**:

VECTOR ACELERACIÓN



Definimos **aceleración instantánea**:

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2}$$

$$\overline{a} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k}$$

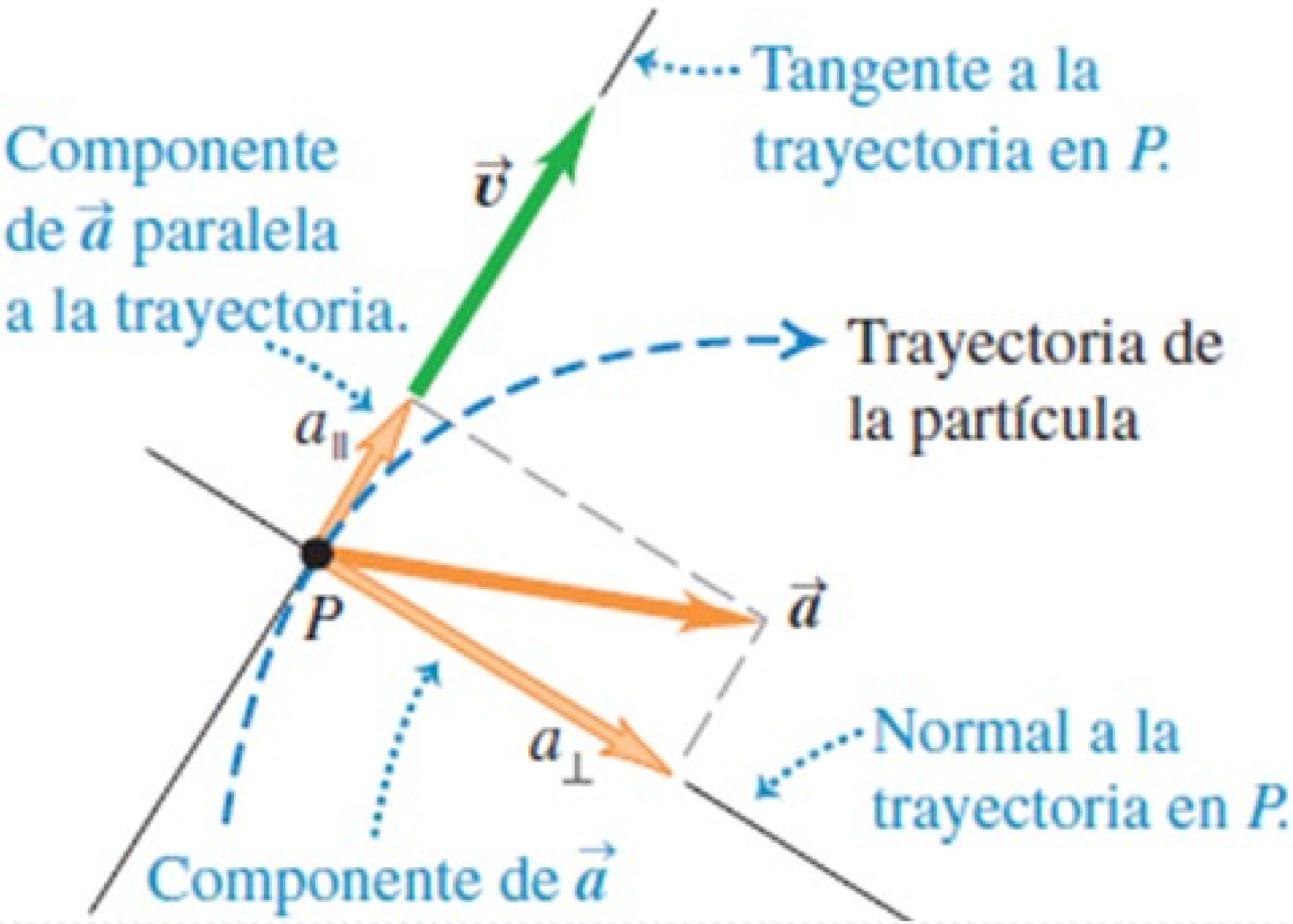
El vector **a** no *tiene que ser tangente a la trayectoria.*

Si la trayectoria es curva, apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (interior de la curva descrita por la partícula).

La aceleración es tangente a la trayectoria solo si la partícula se mueve en línea recta.

Atención: Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando !!!

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN



El vector $\overline{a}$ se puede visualizar en términos de una ***componente paralela a la trayectoria* de la partícula (paralela a la velocidad)**, y otra ***componente perpendicular a la trayectoria***, (perpendicular a la velocidad).

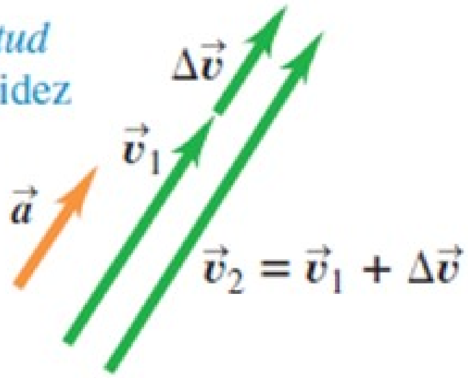
La **componente paralela** determina los **cambios en la *rapidez*** *de la partícula.*

La **componente perpendicular** indica los **cambios en la *dirección del movimiento*** de la partícula.

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN

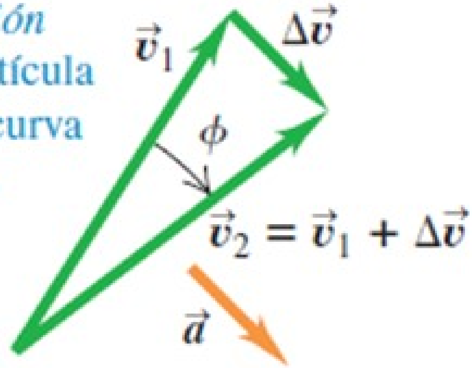
a) Aceleración paralela a la velocidad:

Solo cambia la *magnitud* de la velocidad: la rapidez cambia, pero no la dirección.

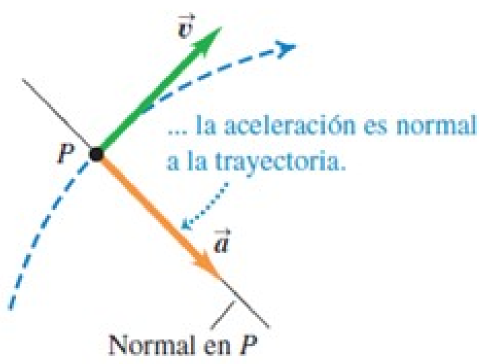


b) Aceleración perpendicular a la velocidad:

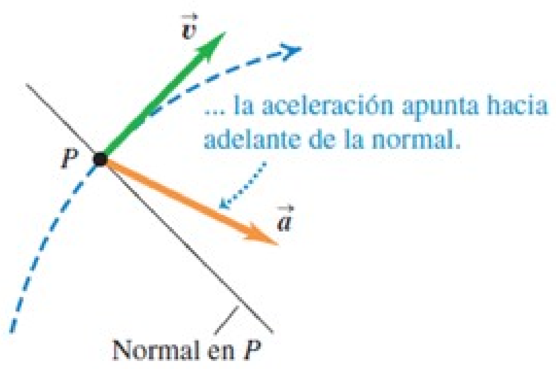
Solo cambia la *dirección* de la velocidad: la partícula sigue una trayectoria curva con rapidez constante.



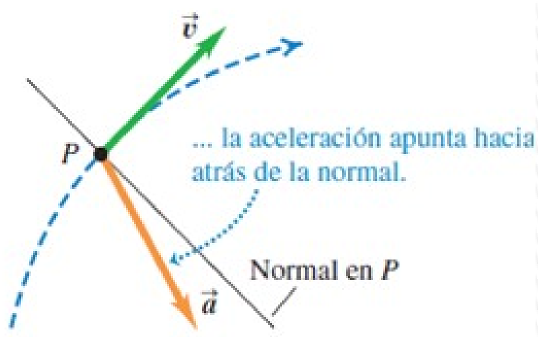
a) Cuando la rapidez es constante en una trayectoria curva ...



b) Cuando la rapidez se incrementa en una trayectoria curva ...



c) Cuando la rapidez disminuye en una trayectoria curva ...



ATENCIÓN:

Es importante reconocer que un objeto puede acelerar en diferentes formas:

1) La magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo.

2) La dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo, incluso si la rapidez es constante, como puede suceder a lo largo de una trayectoria curva.

3) Tanto la magnitud y la dirección del vector velocidad pueden cambiar al mismo tiempo.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

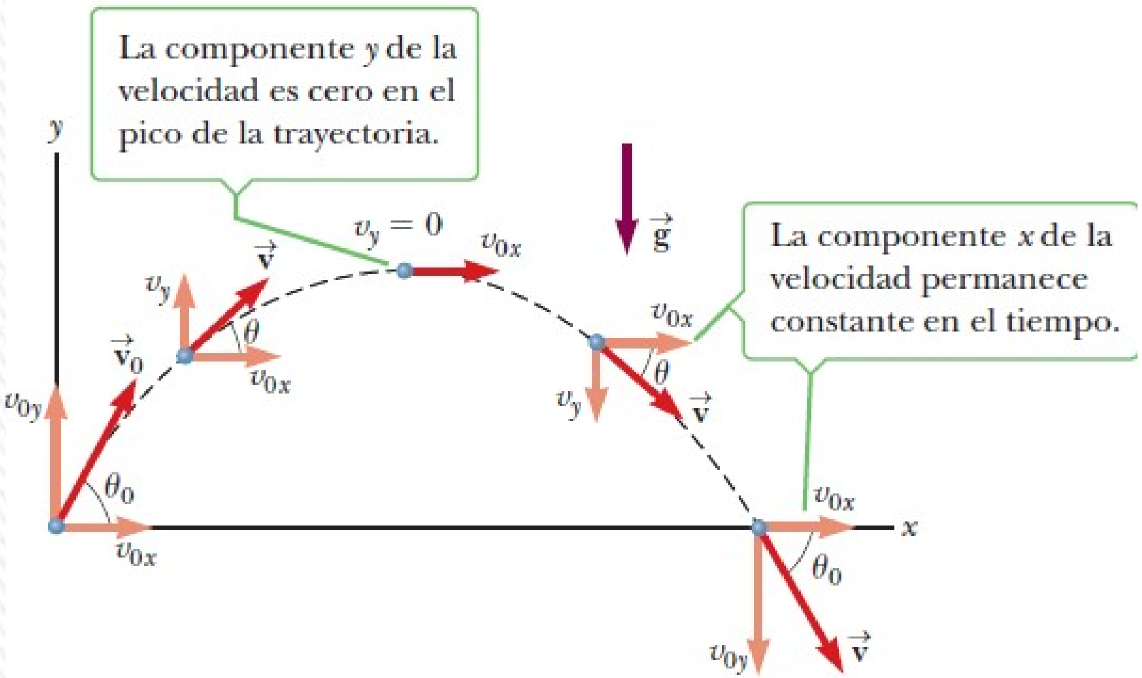
Veremos objetos que se mueven en las dos direcciones *x y y de manera simultánea bajo aceleración constante.*

Un caso especial importante de este movimiento en dos dimensiones se le conoce como **movimiento de un proyectil.**

Cualquiera que haya lanzado alguna clase de objeto en el aire ha observado un movimiento de un proyectil.

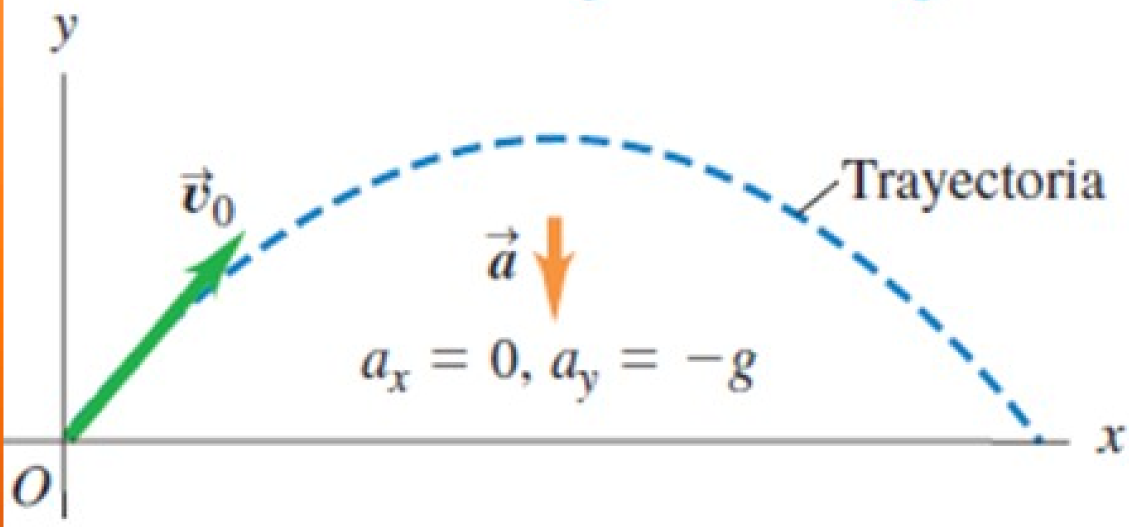
Si se omiten los efectos de la resistencia del aire, la variación de g con la altura y de su dirección y la rotación de la Tierra, la trayectoria del proyectil dentro del campo de gravedad de la Tierra es una curva en forma de **parábola**,

La figura muestra esta trayectoria. La dirección *x positiva es horizontal y hacia la derecha, y la dirección y es vertical* y positiva hacia arriba. El hecho experimental más importante acerca del movimiento de un proyectil en dos dimensiones es que **los movimientos horizontal y vertical son completamente independientes entre sí.**



MOVIMIENTO DE PROYECTILES

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende solo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



Modelo:

•Proyectil como partícula.

•Aceleración gravedad constante tanto en magnitud como en dirección.

•Se ignoran efectos de la resistencia del aire, como curvatura y rotación de la Tierra.

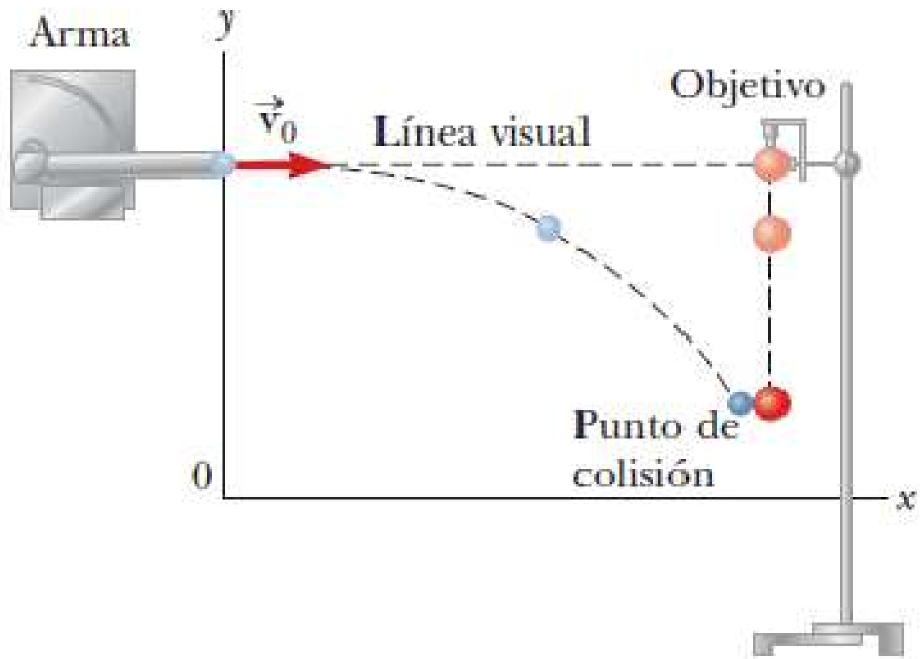
El movimiento del proyectil **siempre se limita a un plano vertical**, determinado por la dirección de la velocidad inicial.
La aceleración gravitatoria es exclusivamente vertical y no puede acelerar al proyectil de forma lateral.

Movimiento es *bidimensional*.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

El movimiento de un proyectil es la superposición de dos movimientos uno horizontal y otro vertical independientes entre sí, y el movimiento en una dirección no tiene efecto sobre el movimiento en la otra dirección.

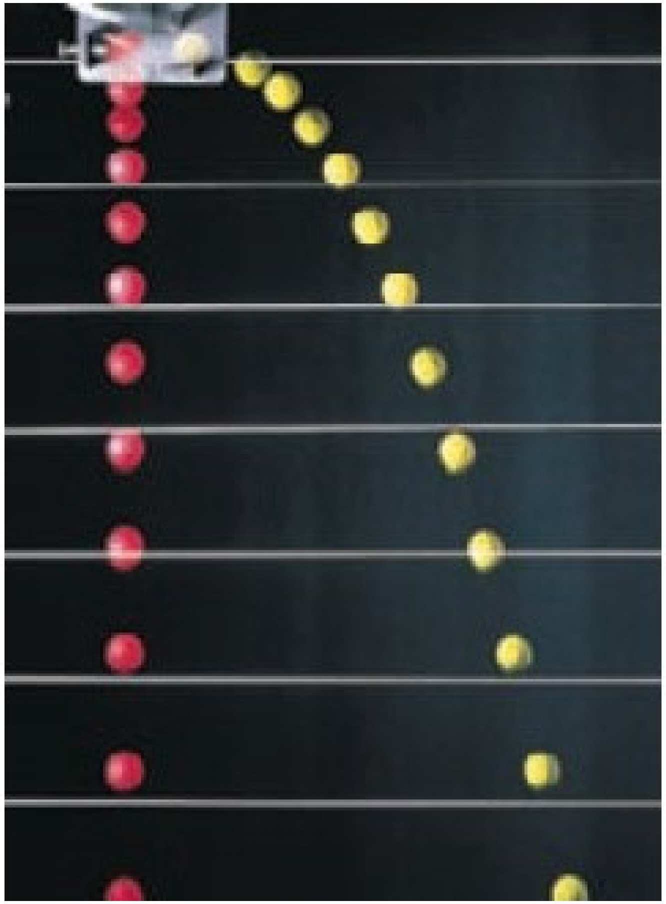
La figura muestra un experimento que ilustra la independencia del movimiento horizontal y vertical.
La pistola apunta directamente a la bola objetivo y es disparada en el instante en que ésta es liberada.
En ausencia de gravedad, el proyectil daría en el blanco porque el objetivo no se movería.
Sin embargo, el proyectil aún da en el blanco en presencia de la gravedad.



Eso significa que el proyectil está cayendo con el mismo desplazamiento vertical que el objetivo, a pesar de su movimiento horizontal.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferentes posición y velocidad en *x*.



Análisis del movimiento: trato por separado las coordenadas *x* y *y*.

Componente x de la aceleración es cero, y componente y es constante e igual a -g.

El movimiento de un proyectil es una combinación de:

- **movimiento horizontal con velocidad constante y,**
- **movimiento vertical con aceleración constante.**

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Ecuaciones de movimiento:

Como según x es un movimiento rectilíneo uniforme (a_x=0) y según y esun movimiento rectilíneo con aceleración constante (a_y= -g)

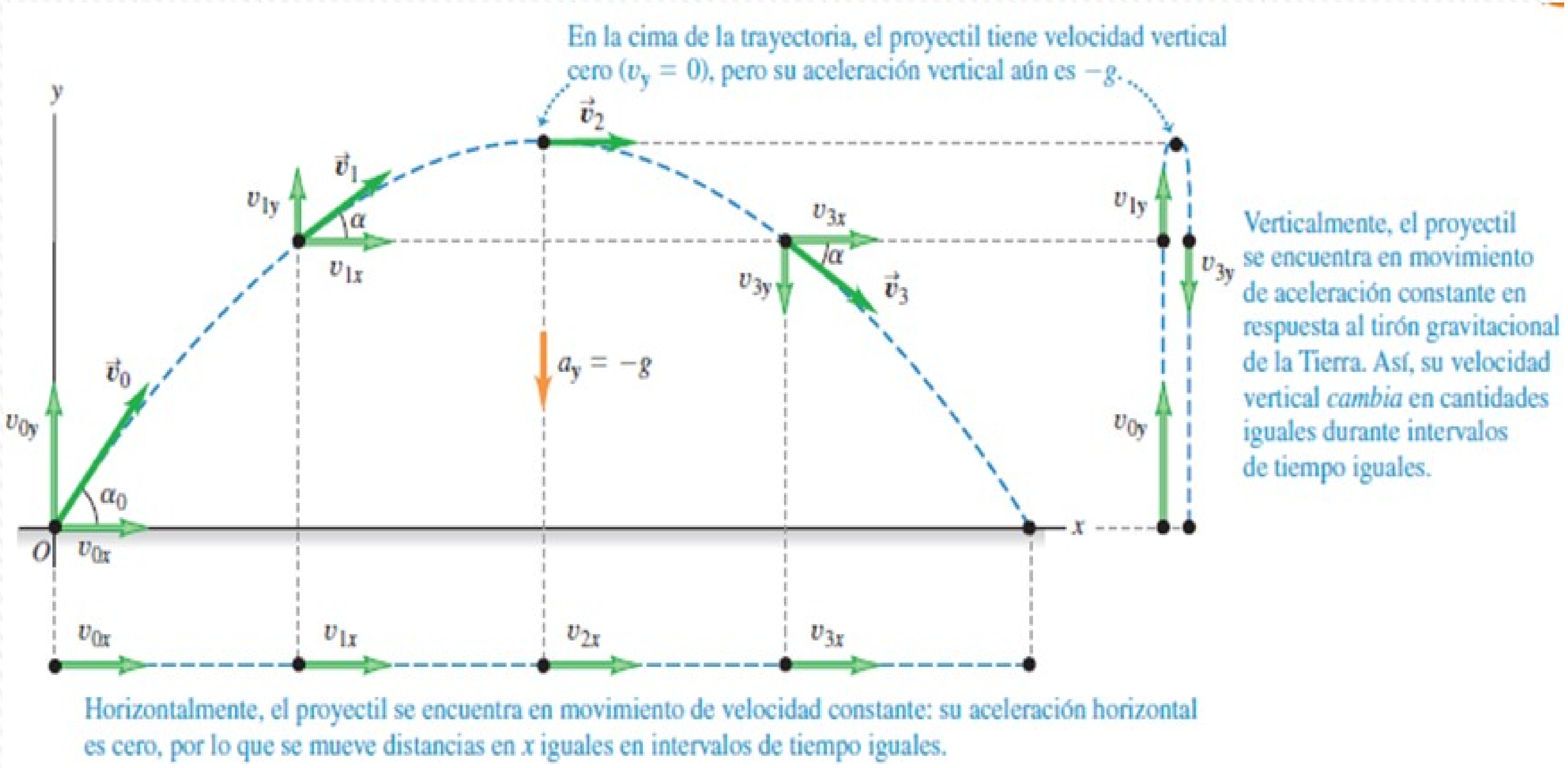
Aceleración: $a_x = 0$ $\qquad a_y = -g$

Velocidad: $v_x = v_{0x}$ $\qquad v_y = v_{0y} - gt$

Posición: $x = x_0 + v_{0x}\, t$ $\qquad y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$v_{0x} = v_o \cos \alpha_0$ $\qquad v_{0y} = v_o \sin \alpha_0$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Movimiento parabólico del modelo de proyectil

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Los hechos importantes del movimiento de un proyectil se pueden resumir como sigue:

1. Siempre que se omita la resistencia del aire, la componente horizontal de la velocidad v_x permanece constante porque no existe componente horizontal de la aceleración.

2. La componente vertical de la aceleración es igual a la aceleración en caída libre $-g$.

3. La componente vertical de la velocidad v_y y el desplazamiento en la dirección y son idénticos a los de un cuerpo en caída libre.

4. El movimiento de proyectil puede describirse como una superposición de dos movimientos independientes en las direcciones x y y.

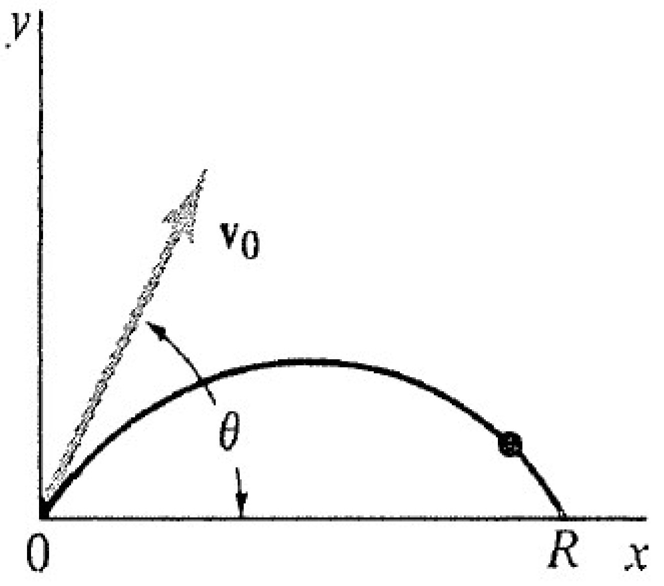
ATENCIÓN: En la altura máxima que alcanza el proyectil sólo se anula la componente vertical de la velocidad, la componente horizontal permanece invariable.

La aceleración en la dirección y *tampoco* es cero en la parte superior de la trayectoria del proyectil. Sólo la componente y de la velocidad es cero.

Si la aceleración también fuera cero, ¡el proyectil jamás llegaría abajo!

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Deduciremos las ecuaciones vinculadas a la altura máxima alcanzada y el alcance máximo cuando se dispara un proyectil, y la altura de disparo es la misma que la de llegada:



La altura máxima, se alcanza cuando la componente vertical de la altura se anula. Llamaremos t* al instante en que esto se produce.

$$v_y = v_o \sin\theta - g t^* = 0 \qquad \boxed{t^* = \frac{v_o \sin\theta}{g}}$$

La altura máxima se acanza para ese instante:

$$h_{máx} = y(t^*) = v_o \sin\theta\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = v_o \sin\theta \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$\boxed{h_{máx} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Como el tiempo de subida es el mismo que el de bajada, el alcance *R*= *x*(2*t**)

$$R = x(2t^*) = v_0 \cos\theta\,(2t^*) = v_0 \cos\theta \left(2\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$$

Teniendo en cuenta que: 2sinθ.cosθ= sin 2θ

$$R = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\,\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Puede verse que:

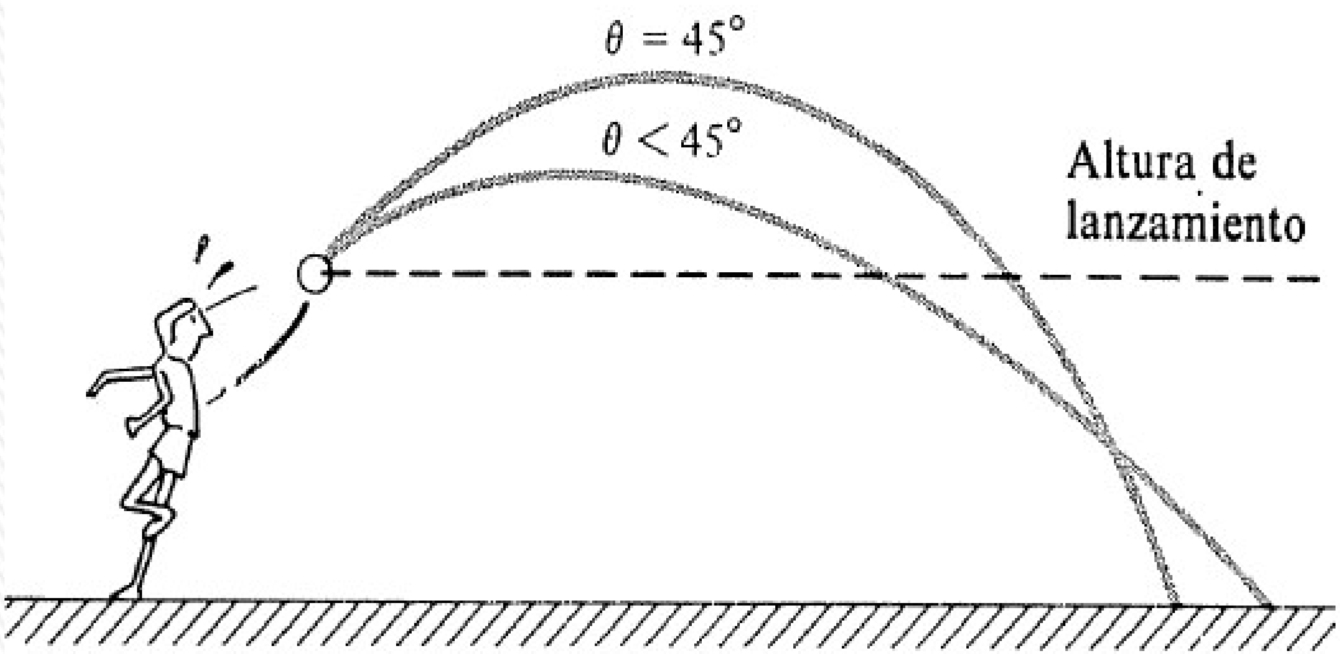
El alcance máximo es cuando θ = 45° y vale: $R_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$

Como el seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario, los proyectiles lanzados desde una superficie plana con un ángulo θ y con un ángulo 90- θ y con la misma rapidez tienen el mismo alcance, pero a mayor ángulo de tiro, mayor altura y mayor tiempo de vuelo.

Esto es válido sólo si la altura de lanzamiento es la misma que la altura de llegada.

Veamos qué sucede cuando estas alturas son distintas.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

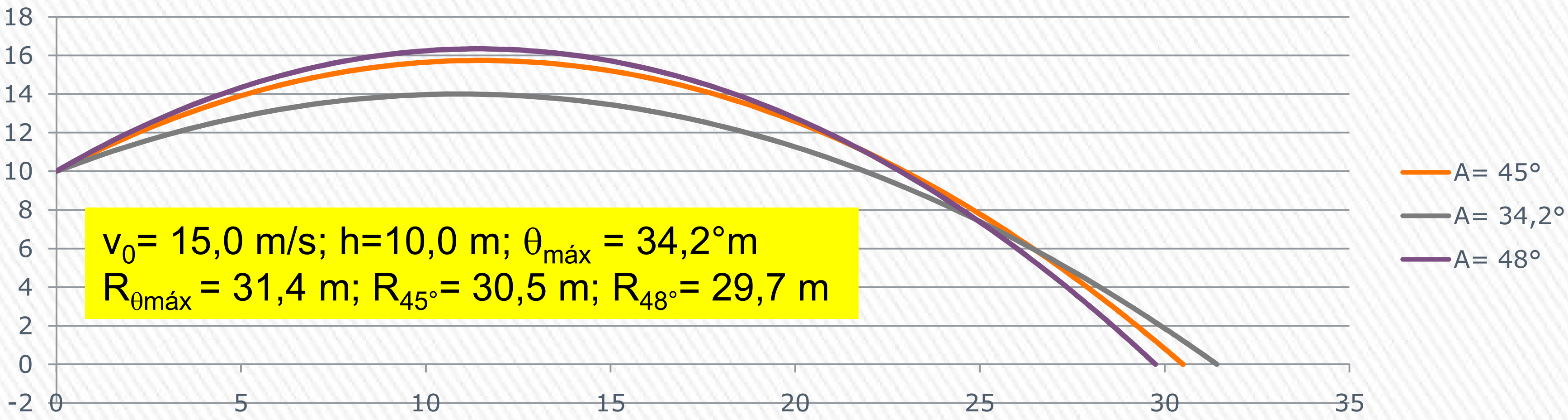


Lanzamiento efectuado por encima del nivel del suelo. La trayectoria para un ángulo de tiro de 45° y otro más pequeño se cortan por debajo de la altura de lanzamiento. La trayectoria más plana tiene un mayor alcance.
Si el punto de llegada está a mayor altura que el de lanzamiento, el alcance máximo se alcanza con un ángulo de lanzamiento mayor a 45°.

$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

h > o si el lanzamiento es a mayor altura que la de llegada: $\theta_{máx} < 45°$
h < o si el lanzamiento es a menor altura que la de llegada: $\theta_{máx} > 45°$

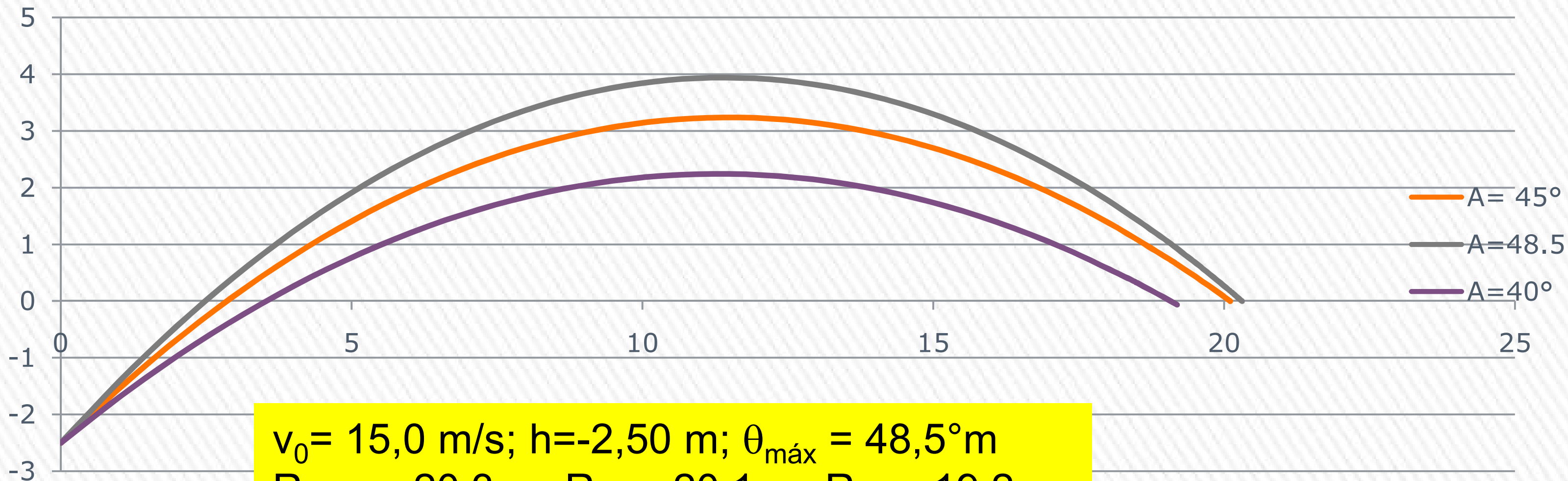
MOVIMIENTO DE PROYECTILES



v_0= 15,0 m/s; h=10,0 m; $\theta_{máx}$ = 34,2°m
$R_{\theta máx}$ = 31,4 m; $R_{45°}$= 30,5 m; $R_{48°}$= 29,7 m

Alcance máximo para lanzamiento h ≠ 0

$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$



v_0= 15,0 m/s; h=-2,50 m; $\theta_{máx}$ = 48,5°m
$R_{\theta máx}$ = 20,3 m; $R_{45°}$= 20,1 m; $R_{40°}$= 19,2 m

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Deducción de ecuación de la trayectoria: $y(x) = (\tan \alpha_0)x - \dfrac{g}{2v_0^2 cos^2 \alpha_0} x^2$

$$x = v_0 \cos \alpha_0 \, t \qquad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}$$

$$y = v_0 \sin \alpha_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = v_0 \sin \alpha_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{v_0 \cos \alpha_0}\right) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \alpha_0)^2}$$

$$y = \tan \alpha_0 \, x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Otras expresiones:

Módulo del vector posición: $$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Rapidez del proyectil (módulo de su velocidad): $$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje +x: $$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Ecuación de la trayectoria (parábola): $$y(x) = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0}x^2$$

Para lanzamiento con altura de lanzamiento igual al de llegada:

Tiempo en que se alcanza la altura máxima: $$t^* = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$$

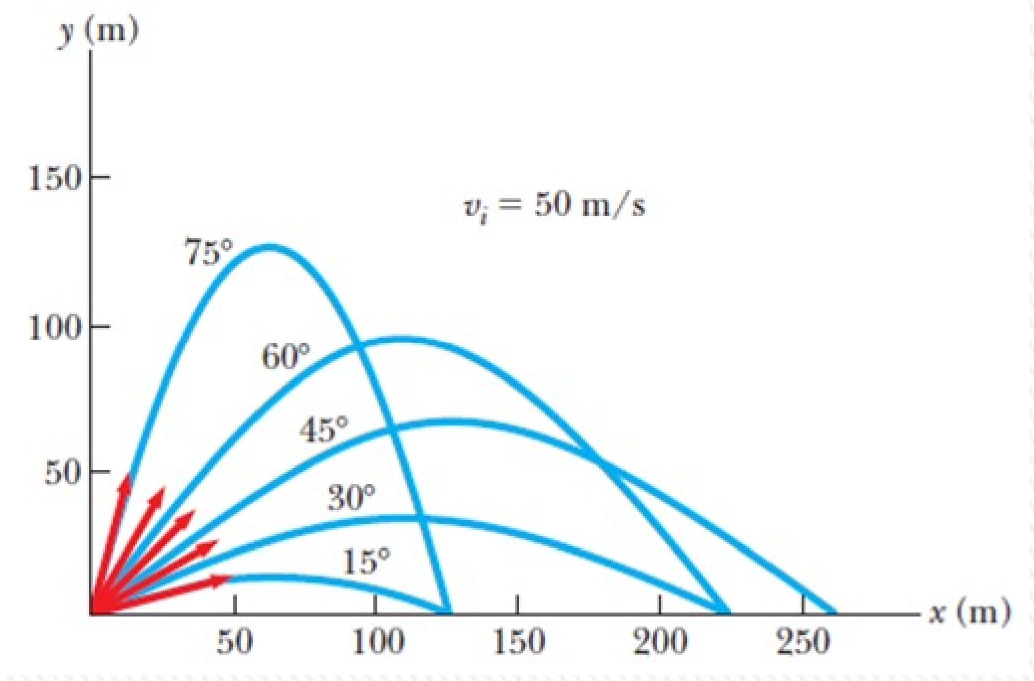
Altura máxima alcanzada: $$h_{max} = y(t^*) = \frac{v_0^2 sin^2\alpha_0}{2g}$$

Alcance: $$R = x(2t^*) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$$

Alcance máximo para $\alpha_0 = 45º$ $$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

PREGUNTA RÁPIDA

Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.



Respuesta: El tiempo de vuelo estará dado por la componente vertical de la velocidad inicial, cuanto mayor sea, mayor será el tiempo de vuelo. Por tanto a mayor ángulo, mayor tiempo de vuelo.

Cuestionarios rápidos:

1) Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire.

¿Hay un punto donde $\overline{a}$ sea paralela a $\overline{v}$? **NO.**

¿Y perpendicular a $\overline{v}$? **SI, en el punto donde alcanza la altura máxima ($v_y = 0$)**

2) En el instante en que usted dispara una bala horizontalmente con un rifle, deja caer otra bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo?

Las dos al mismo tiempo!!!

3) Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. *Al llegar a su máxima altura,* ¿cuáles son su vector velocidad, su rapidez y su vector aceleración?

$\overline{v} = v_0 \cos\theta \;\; \hat{\imath}$ $\qquad v = v_0 \cos\theta$ $\qquad \overline{a} = -g\,\hat{\jmath}$

Ejemplo: Ejercicio 2.15

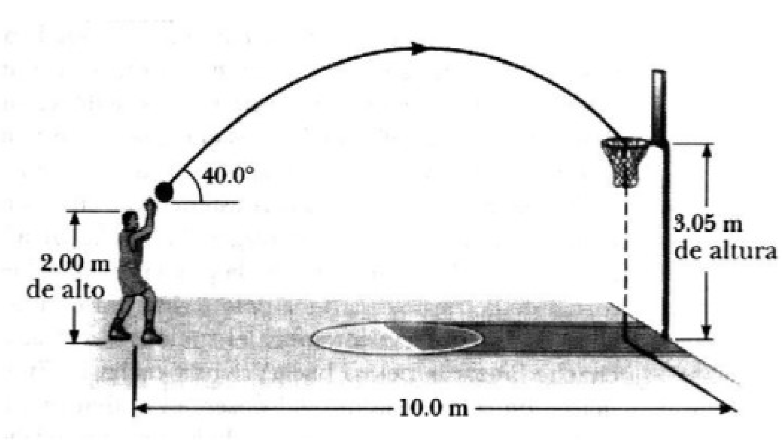
15.- Se lanza horizontalmente una pelota con velocidad v_0 desde una altura *h* y otra se deja caer al mismo tiempo desde la misma altura.
¿Cuál de las dos llegará primero al suelo?
¿Cuál de las dos tendrá un mayor módulo de la velocidad al llegar al suelo?

1- Ambas llegan al suelo al mismo tiempo, pues ambas tienen la misma velocidad en el sentido vertical. .

2- La que se lanza en forma horizontal tendrá mayor módulo de velocidad.
Esto es debido a que esta pelota tiene una componente horizontal de velocidad que la otra no tiene.

Ejemplo: Ejercicio 2.17

17.- Un jugador de básquetbol de 2,00 m de altura lanza un tiro al aro que está a 3,05 m de altura, desde una distancia de 10,0 m con un ángulo de 40º respecto a la horizontal. ¿Con qué velocidad inicial debe tirar de manera que la pelota entre al aro sin tocar el tablero?



Ecuación de la trayectoria: $$y = \tan\theta\, x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

$$\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} = \tan\theta\, x - y \qquad \frac{gx^2}{\tan\theta x - y} = 2v_0^2\cos^2\theta \qquad \frac{gx^2}{2\cos^2\theta(\tan\theta x - y)} = v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{gx^2}{\tan\theta\, x - y}} = \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(\tan\theta\, x - y)}}$$

Tomo como origen el punto de lanzamiento…. Entonces el aro está en x= 10,0 m e y= 1,05 m

$$v_0 = \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(\tan\theta\, x - y)}} = \frac{10{,}0}{\cos 40{,}0°}\sqrt{\frac{9{,}8}{2(\tan 40{,}0° \times 10{,}0 - 3{,}05)}} = 10{,}7\ m/s$$

Aceleración constante en dos dimensiones

En un caso más general, pueden existir aceleraciones que tengan cualquier dirección (efectos de fricción con el aire, fricción superficial, o motores). Estas aceleraciones, consideradas juntas, forman una cantidad vectorial con componentes a_x y a_y. Cuando ambas componentes son constantes, se pueden aplicar las siguientes ecuaciones:

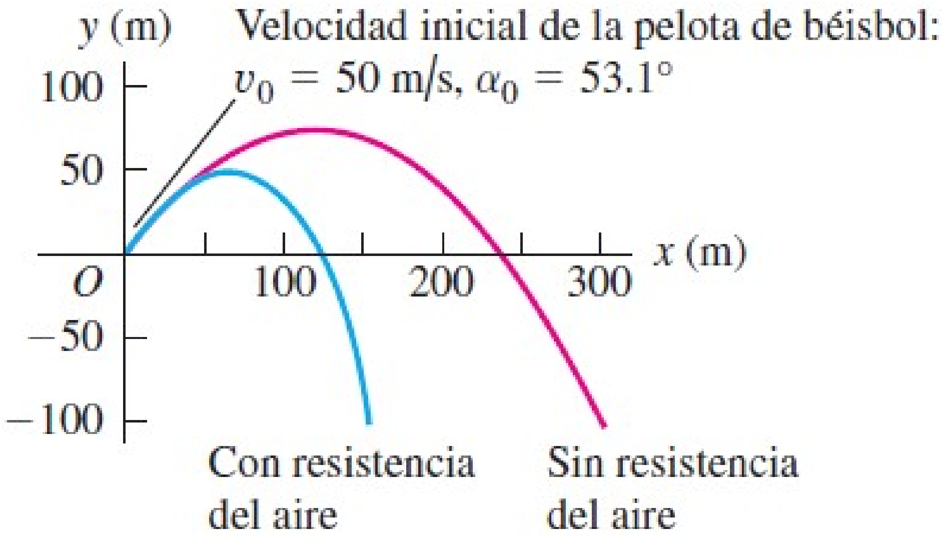
$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \Delta x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad {v_x}^2 = {v_{0x}}^2 + 2 a_x \Delta x$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \qquad \Delta y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad {v_y}^2 = {v_{0y}}^2 + 2 a_y \Delta y$$

BALÍSTICA CON RESISTENCIA DEL MUNDO REAL

Efecto de la resistencia del aire

3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



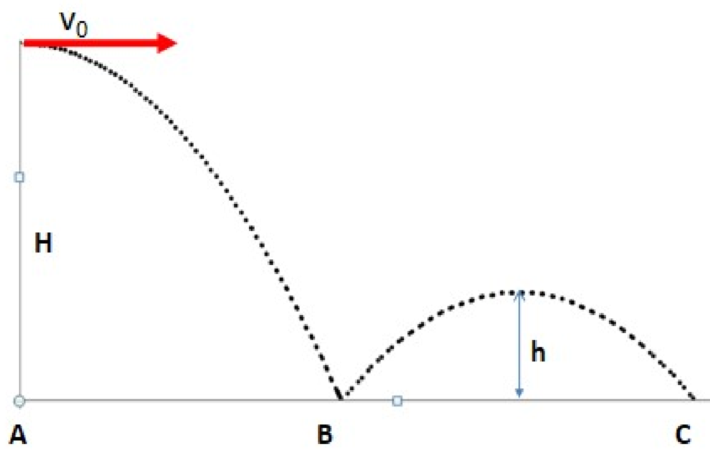
La fricción del aire tiene un efecto apreciable sobre los proyectiles, en especial los que son *ligeros y rápidos;* **la resistencia es proporcional al *cuadrado de la velocidad.***

Una pelota de béisbol bien bateada, que dure mucho en el aire, puede perder hasta la mitad de su rapidez inicial, y llegar sólo un poco más allá de la mitad de lo que hubiera llegado sin fricción.

Una bala de rifle (sólo con unos 150 g de masa) disparada a 0,6 km/s, lo cual es bastante, sufrirá mucho la fricción. Si no hubiera resistencia, tendría un alcance máximo tremendo de unos 40km.

Debido a la resistencia del aire, no es probable que la bala llegue mucho más allá de 4 km.

Ejemplo: 2.20- Parcial 2021



Se lanza una bolita con velocidad horizontal v_0 =10,0 m/s desde una altura *H* = 2,00 m del piso. Al rebotar su rapidez vertical se reduce a la mitad que la que tenía justo antes de rebotar mientras que la rapidez horizontal permanece constante.

¿A qué distancia del lugar de lanzamiento se da el segundo rebote? Es decir se pide determinar la distancia AC, expresar el resultado en metros.

Tomar g=9,8 m/s² como valor exacto.

Datos: v_0 = 10,0 m/s; H = 2,00 m

Tiempo que demora la bolita en llegar al piso: $H = \frac{1}{2} g t^2$ $\quad t_B = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(2{,}00)}{9{,}8}} = 0{,}63888\ s$

Rapidez vertical con que llega a B: $v_{yBant.} = g.t_B = 9{,}8 \times 0{,}63888 = 6{,}260990\ \ m/s$

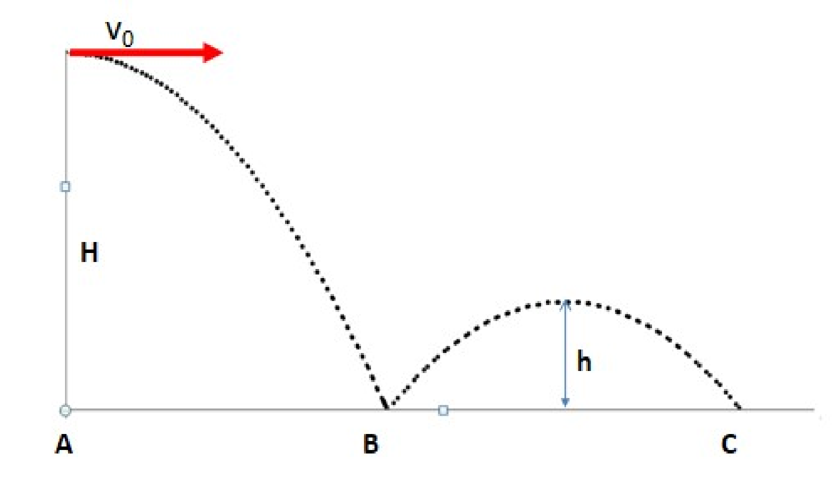
Rapidez vertical con que sale de B: $v_{yBpos.} = \frac{v_{yBant.}}{2} = 3{,}130495\ \ m/s$

Tiempo de vuelo posterior al rebote: $t_{BC} = 2\frac{v_{yBant.}}{g} = 2\frac{3{,}130495}{9.8} = 0{,}63888\ s$

Distancia AC recorrida: $d_{Ac} = v_0(t_B + t_{BC}) = 10{,}0 \times 0{,}63888 \times 2 = 12{,}7775$ m

d_{ABC} = 12,8 m

Ejemplo: 2.20- Parcial 2021



b) Determine cuál de las siguientes aseveraciones son verdaderas:

i) La aceleración media en el primer rebote en el punto B, es decir en el intervalo de tiempo antes y después de impactar con el suelo, es vertical hacia abajo. **Falso**

ii) El tiempo que demora la bolita en llegar al punto B desde su lanzamiento es menor que el que tarda en ir desde B a C. **Falso**

iii) La distancia AB es igual a la BC. **Verdadero**

iv) Cuando la bolita alcanza su altura máxima entre el trayecto B y C la velocidad es perpendicular a la aceleración. **Verdadero**