Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2022

Práctico 3: Relaciones: generalidades y relaciones de equivalencia

1. Investigar si las siguientes relaciones son o no reflexivas, irreflexivas, simétricas, asimétricas, transitivas.
   - sobre $\mathbb{N}$: ser la mitad de.
   - sobre el conjunto de las rectas de un plano: ser perpendicular a,
   - sobre el conjunto de las rectas de un plano: ser paralela a.
   - para un universo $\mathcal{U}$ y un subconjunto fijo X de $\mathcal{U}$, definimos $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que si $A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$ entonces $A\mathcal{R}B$ si $A \cap X = B \cap X$.
   - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x - y$ es par
   - sobre $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ si $x + y$ es par.
   - idem anteriores cambiando par por impar.
   - sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si $a \leq c$.
2. Describir por extensión la relación $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} |\ x^2 + y^2 = 4\}$. Representarla en el plano. Luego, representar en el plano la relación $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ x^2 + y^2 = 4\}$.

   RELACIONES DE EQUIVALENCIA
3. Averiguar cuáles relaciones del ejercicio 1 son de equivalencia.
4. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   a) Hallar $\sim$ una relación de equivalencia con la menor cantidad de elementos posible que contiene a los pares $(1, 2)$ y $(4, 5)$.
   b) Idem que el anterior para $(1, 2)$ y $(2, 5)$.
   c) Para la relación definida por la parte anterior, hallar [1], [2] y [3].
5. Consideramos la relación de congruencia módulo n en $\mathbb{Z}$: $a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b$ es multiplo de n.
   a) Probar que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.
   b) Probar que el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ tiene exactamente n elementos.

c) Probar que si $a \equiv_n a'$ y $b \equiv_n b'$, entonces:
   - $a + b \equiv_n a' + b'$
   - $a.b \equiv_n a'.b'$.

   El punto b permite definir la suma y el producto en $\mathbb{Z}/\equiv_n$, mediante $[a] + [b] = [a + b]$ y $[a].[b] = [a.b]$.

6. Sea la relación en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dada por $u \sim v$ si y sólo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $u = \lambda v$.

   a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Determinar cuáles son las clases de equivalencia y representar geométricamente una clase de equivalencia.

   c) Elegir un representante de cada clase de forma que el conjunto de representantes elegido sea fácilmente representable geométricamente.

7. **Construcción del conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$**
   Sobre $\mathbb{Z} \times Z \setminus \{0\}$, definimos la relación $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si $ad - bc = 0$.

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   b) Hallar las clases de $(1, 2)$ y de $(3, 1)$.

   c) Comparar el conjunto cociente con $\mathbb{Q}$.

Al final de esta primera parte

Llegamos al final de la primera parte del curso, y queremos guiarte con algunas preguntas para que evalúes el camino que recorriste.

1. Etapa inicial

   a) ¿Qué temas conocía de los que se presentaron?

   b) ¿Me interesaban a priori los temas de esta primera parte?

2. Proceso

   a) Un resultado que me haya resultado relevante.

   b) Una demostración que me haya cautivado.

   c) Una técnica aprendida.

3. Etapa final

   a) De los temas que ya conocía, ¿los conocía en profundidad?

   b) ¿Encontré alguna técnica de trabajo que me resultó útil?

c) ¿Qué aprendí? (en cuanto a conocimientos concretos de la materia o de mímismo como estudiante)

d) ¿Qué preguntas se abrieron a partir de esta parte?