04 –VECTORES Y MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Favor de escribir en el chat (quienes no lo hicieron antes): 1) nombre completo, 2) licenciatura, 3) barrio o localidad desde donde te conectas y 4) Institución de enseñanza media a la que concurriste.
Si no hay objeción grabaremos la clase.

Cuestiones que pretendemos responder hoy:

1. Vectores: características y operaciones con vectores.
2. Componentes de vectores y vectores unitarios.
3. Cinemática en más de una dimensión:
   posición, desplazamiento, velocidad y aceleración como vectores.
4. Movimiento de proyectil: modelo, ecuaciones de movimiento, alcance, trayectoria.
5. Preguntas rápidas y ejemplos de aplicación.
6. Balística en la vida real.

VECTORES Y SUS PROPIEDADES

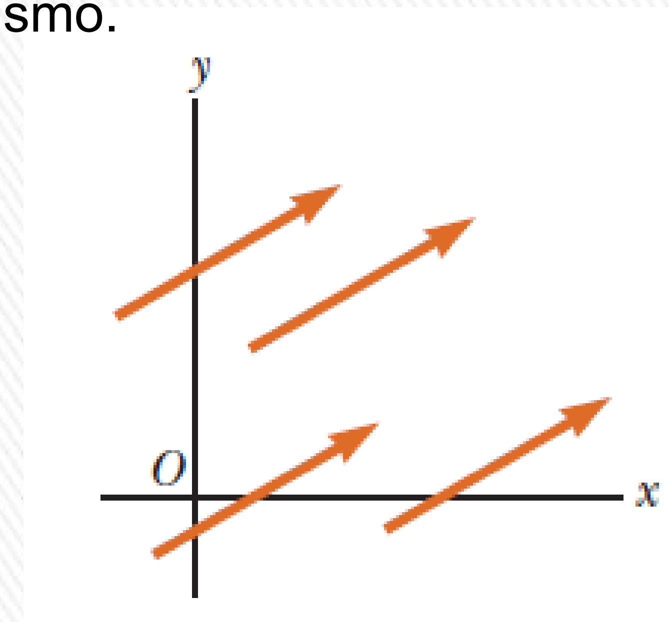
Escribo un vector con una flecha o barra sobre la letra y en negrita. $\bar{\mathbf{A}}$

$$A = |\bar{A}|$$

Magnitud o **módulo de un vector** es un número que coincide con la "longitud" del vector en la representación gráfica (distancia euclideana).
Se representa en cursiva sin la barra.

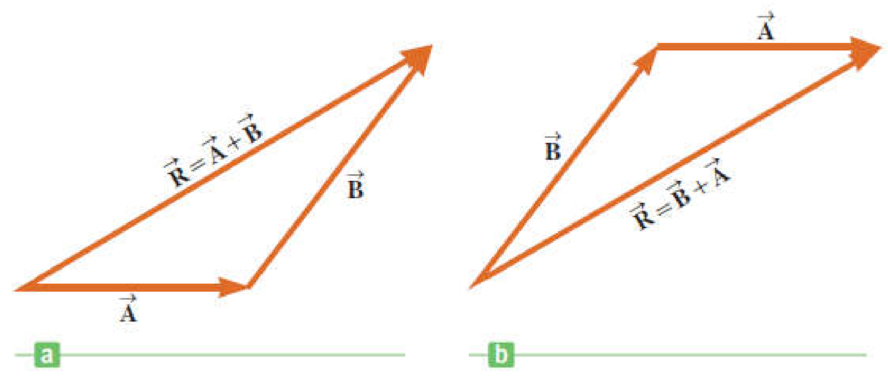
Igualdad de vectores: deben tener la misma magnitud, dirección y sentido.
Esto permite trasladar un vector paralelo a sí mismo.

Los cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección y sentido.



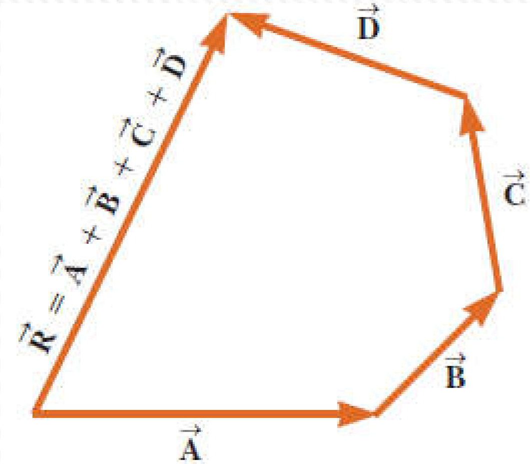
VECTORES Y SUS PROPIEDADES

Suma geométrica: para sumar el vector **B** al vector **A**, dibujo **A** con alguna escala y luego dibujo el vector **B** a la misma escala con el extremo inicial en la punta de **A.**



El **vector resultante R= A + B** es el vector que se dibuja desde el extremo inicial de **A** hacia el extremo final de **B.**
Este procedimiento se conoce como el **método del triángulo de la suma.**
Ley conmutativa de la suma: **A+B = B+A**.

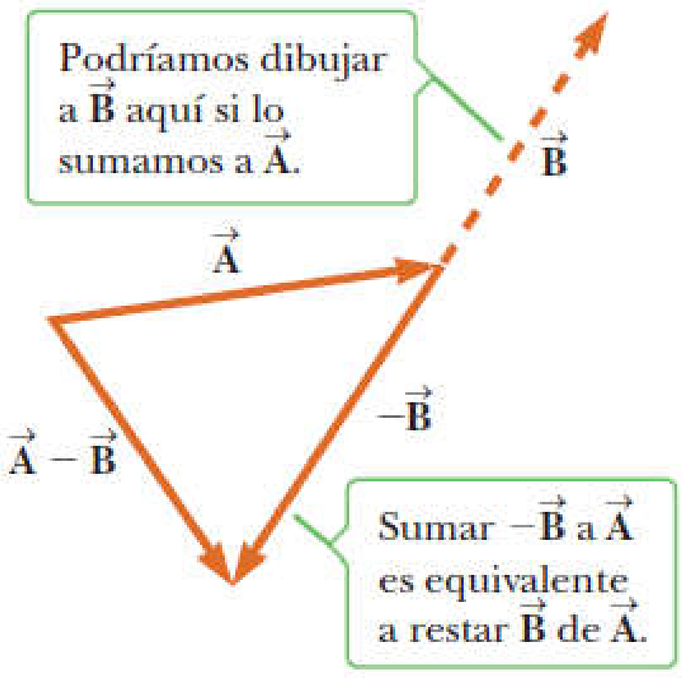
Se puede generalizar para sumar más de dos vectores.
El vector suma resultante **R**=**A**+**B**+**C**+**D** es el vector que se dibuja desde el extremo inicial del primer vector hacia el extremo final del último.
El orden en el cual los vectores se sumen no importa.



VECTORES Y SUS PROPIEDADES

Opuesto de un vector : es el vector que da cero cuando se suma al mismo: es decir que **A** y **–A** tienen la misma magnitud y dirección pero sentidos opuestos.

Resta de vectores: se hace uso de la definición del opuesto de un vector. Operación **A** – **B** : al vector **A** le sumo el vector **–B.**

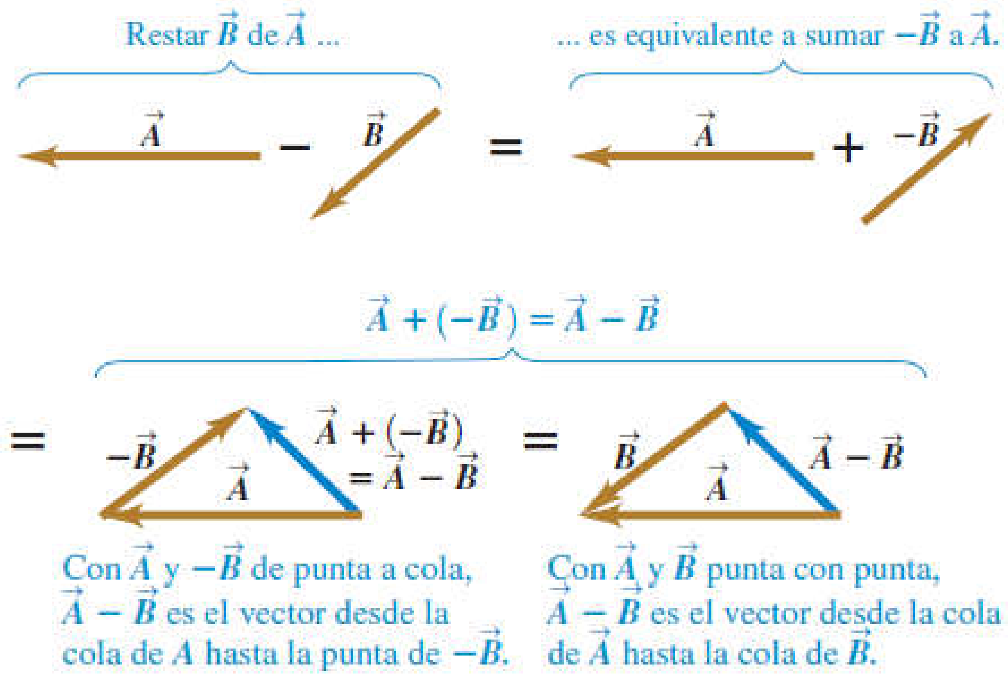


Multiplicación de un vector mediante un escalar.

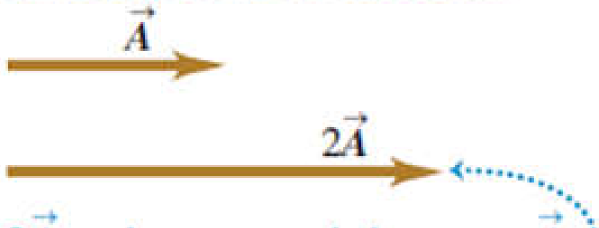
μ es un escalar y **v** un vector.
El producto μ.**v** es otro vector **V** de módulo μ veces el módulo de **v** (**V**=μ**v**), de la misma dirección que **v** y de sentido igual al de **v** si μ > 0; y si μ < 0 el sentido de **V** será contrario al de **v**.

Cuidado: el módulo del vector suma, no es igual a la suma de los módulos (salvo que tengan la misma dirección)

VECTORES Y SUS PROPIEDADES



Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector cambia, pero no su dirección.



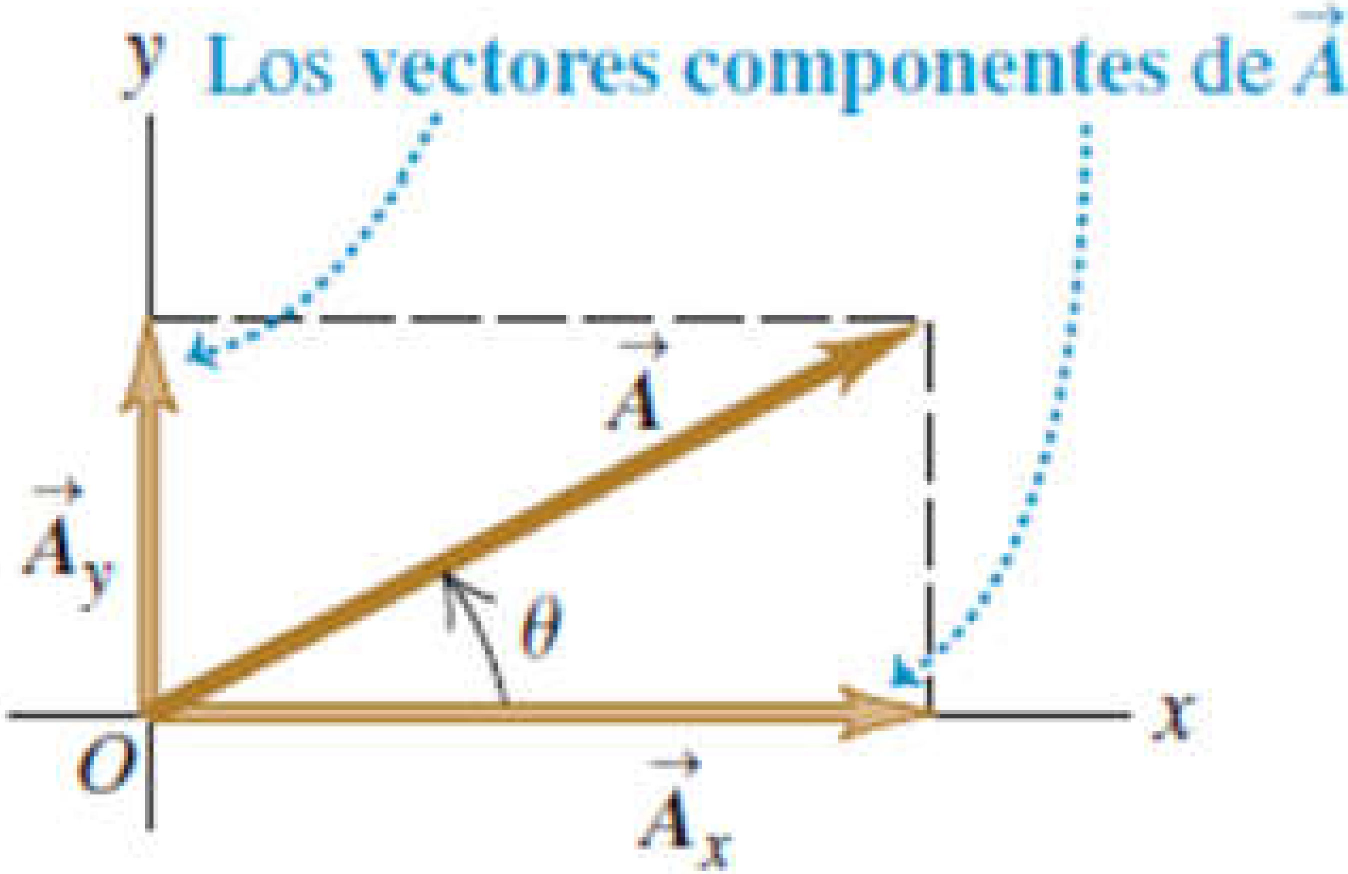
$2\vec{A}$ es dos veces más largo que $\vec{A}$.

Al multiplicar un vector por un escalar negativo, cambia su magnitud y se invierte su dirección.

$-3\vec{A}$ es tres veces más largo que $\vec{A}$ y apunta en la dirección contraria.

Componentes de un vector

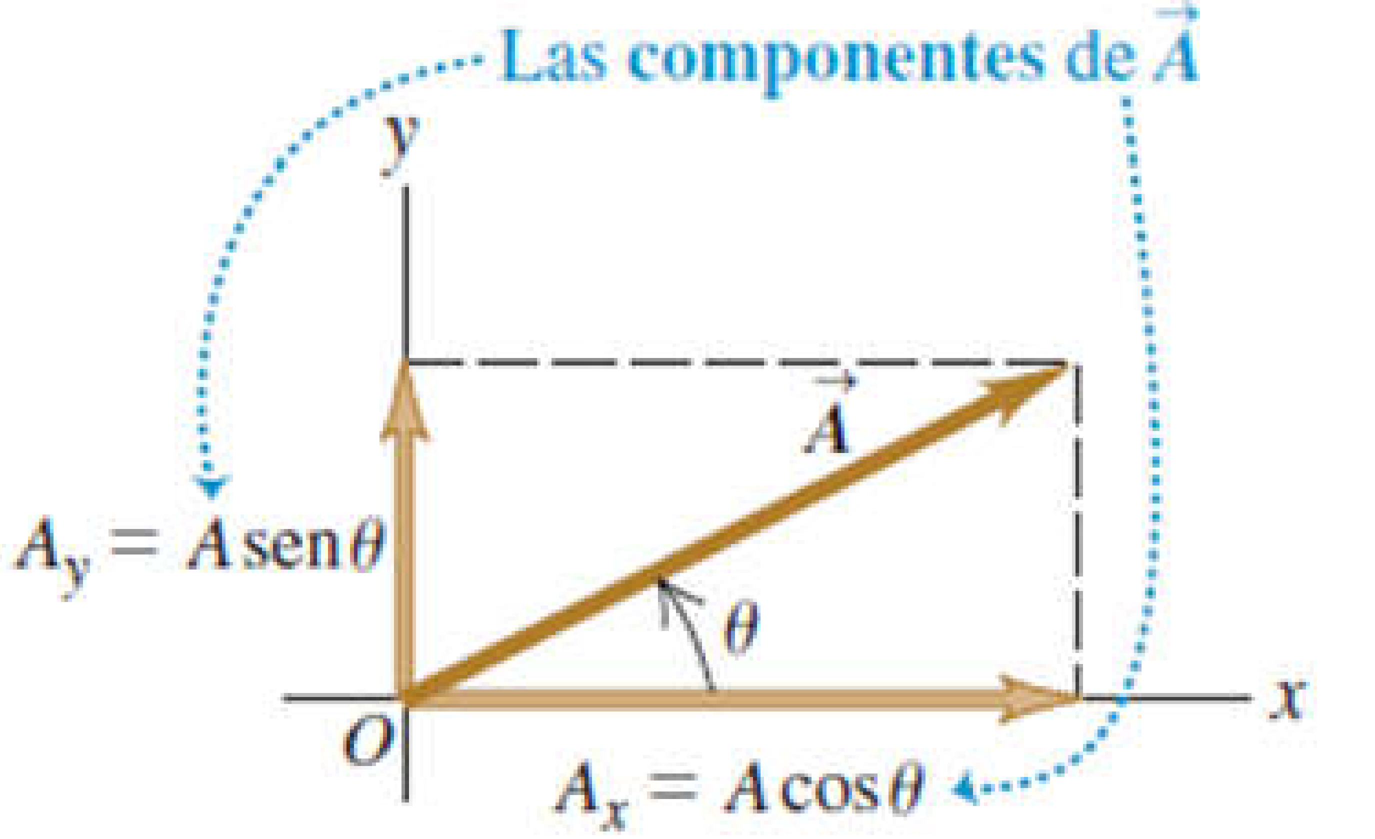
Cualquier vector en el plano *xy se puede representar como la suma de un vector paralelo al eje x y un vector paralelo al eje y.* Estos dos vectores **A_x** y **A_y** *; son los* ***vectores componentes*** *de **A**:* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_x} + \boldsymbol{A_y}$



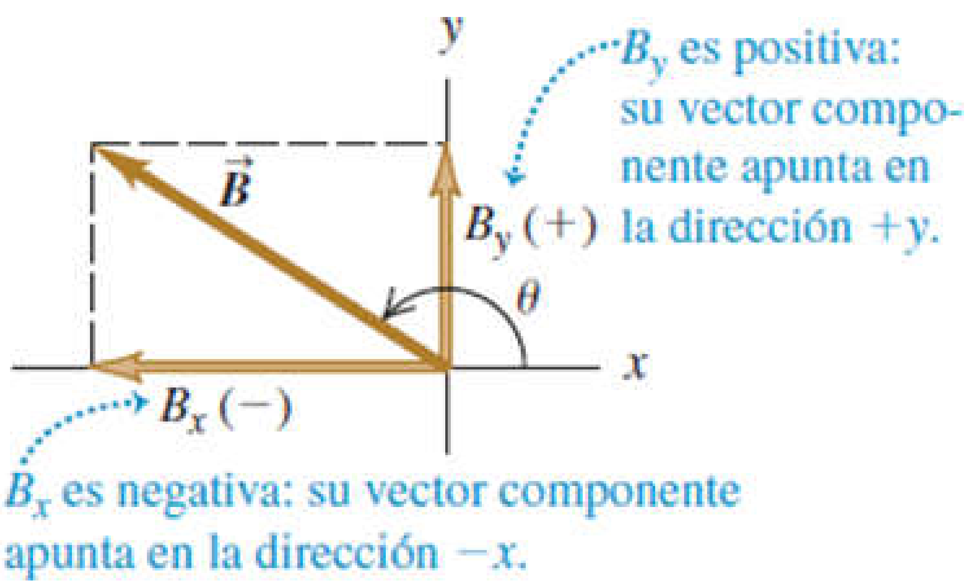
Componentes de un vector

Definimos el número A_x como el módulo de $\mathbf{A_x}$ si apunta en el sentido positivo, si apunta en el sentido negativo, es su opuesto. Análogamente se define A_y.

*Los números A_x y A_y son las **componentes** de **A**.*

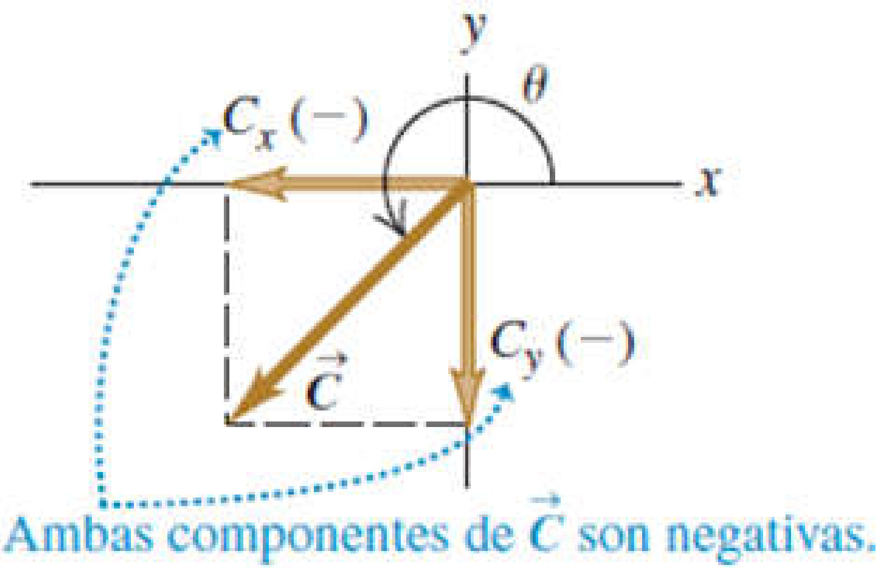


Componentes de un vector



Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.

Describimos la dirección de un vector por su ángulo θ en relación con una dirección de referencia: *el eje x positivo,* el ángulo debe ser medido en el sentido antihorario.



$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$

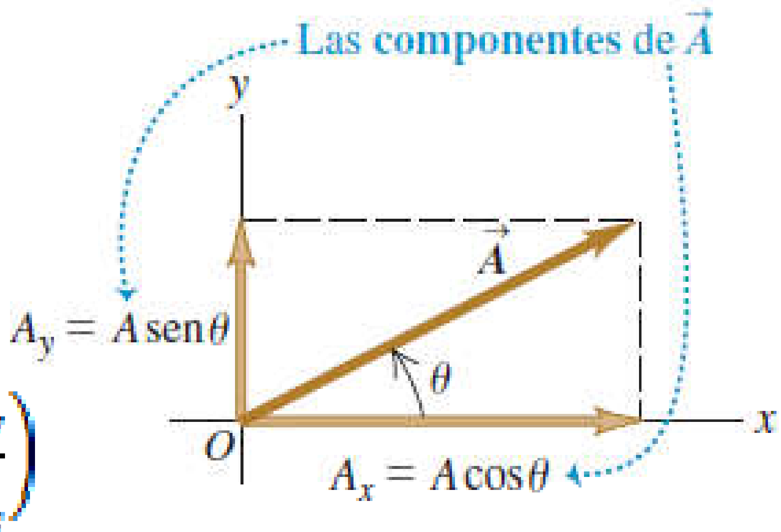
$$A_x = A\cos\theta \qquad \text{y} \qquad A_y = A\operatorname{sen}\theta$$

(θ medido del eje $+x$ girando hacia el eje $+y$)

Componentes de vectores: cálculos

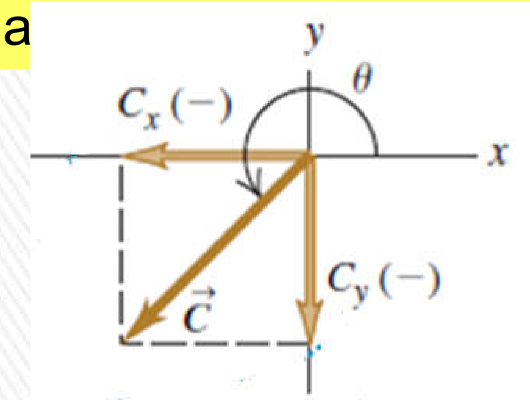
1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$



$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \Longrightarrow \quad \theta = arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

CUIDADO: Cálculo de dirección de vector a partir de sus componentes
Inconveniente en uso de ecuaciones p/obtener θ: dos ángulos cualesquiera que difieran 180° tienen la misma tangente. Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individua



C_x = -5,0 m $\quad$ C_y = -5,0 m

$$\theta = arctan\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = arctan\left(\frac{-5{,}0}{-5{,}0}\right) = arctan(1) = 45°$$

Sin embargo el valor correcto es: 225°

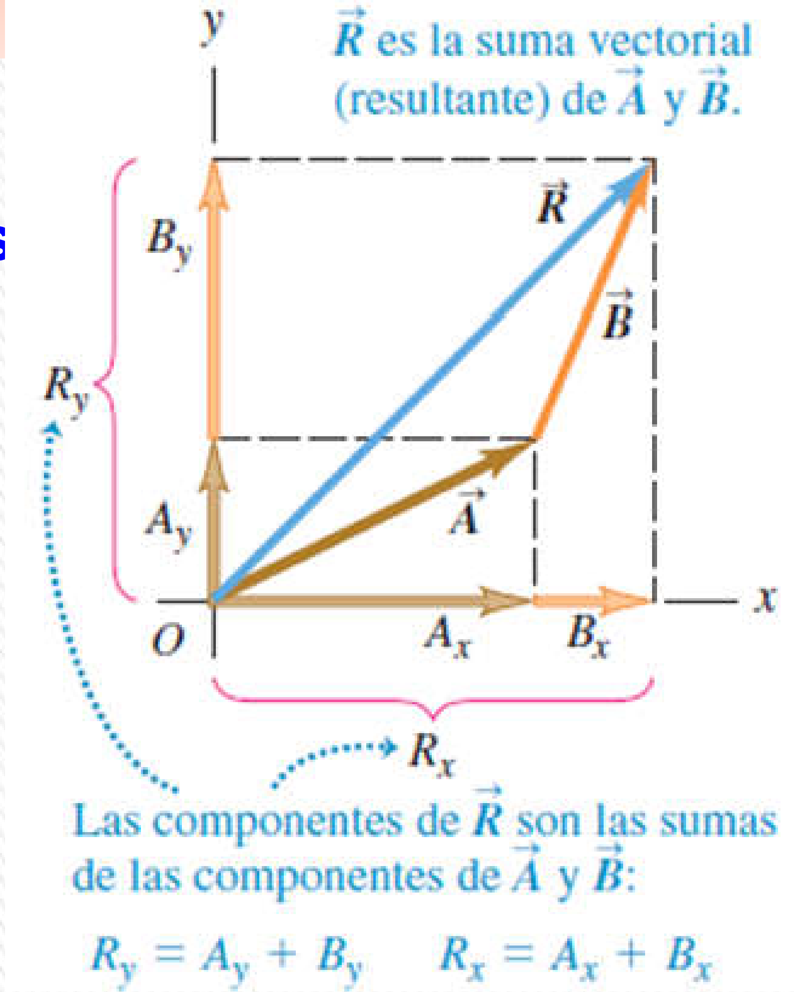
Componentes de vectores: cálculos

2. Multiplicación de un vector por un escalar.

Si multiplicamos un vector **A** por un escalar c, cada componente del vector **D**= c.**A**, es el producto de c por la correspondiente componente de **A**.

$D_x = c.A_x$ $D_y = c.A_y$

3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores



Cada una de las componentes del vector suma, es la suma de las respectivas componentes de los vectores:

R = **A** + **B**

$R_x = A_x + B_x$ $R_y = A_y + B_y$

Podemos ampliar este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores

Componentes de vectores (3D)

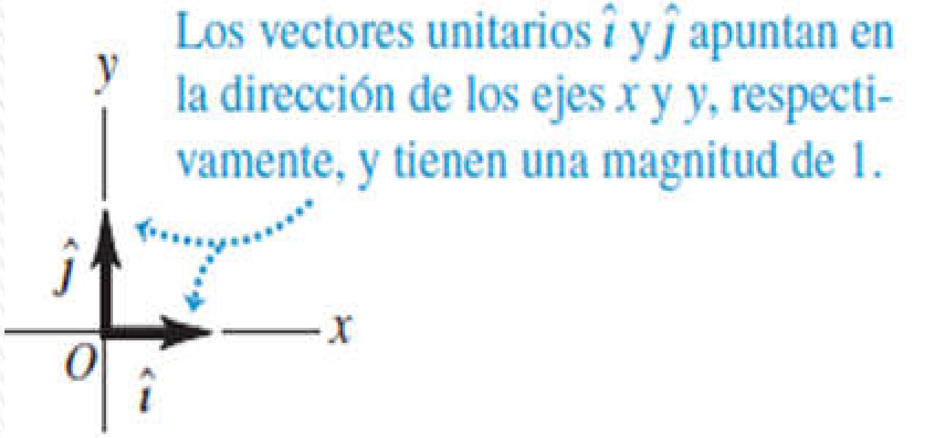
El método de las componentes se puede generalizar para tres dimensiones: vectores con cualquier dirección en el espacio.

Se introduce un eje *z perpendicular al plano xy; entonces, en general,*
Un vector **A** tiene componentes *Ax, Ay y Az en las tres direcciones de coordenadas.*
La magnitud *A está dada por:*

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

VECTORES UNITARIOS (VERSORES)

Vector unitario (o versor) es un vector con módulo igual a 1. Su única finalidad consiste en direccionar: señalar una dirección en el espacio.



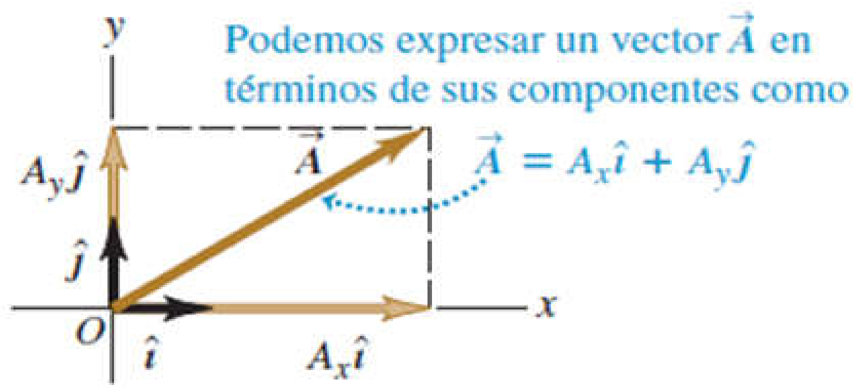
Incluiremos un acento circunflejo o “sombrero” (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría ser 1 o alguna otra.

En un sistema de coordenadas *x-y podemos definir un vector unitario* $\hat{\imath}$ *que apunte* en la dirección del eje +x *y un vector unitario* $\hat{\jmath}$ *que apunte en la* *dirección del eje +y*

VECTORES UNITARIOS (VERSORES)

Vector **A** de dos dimensiones escrito en función de sus 2 componentes

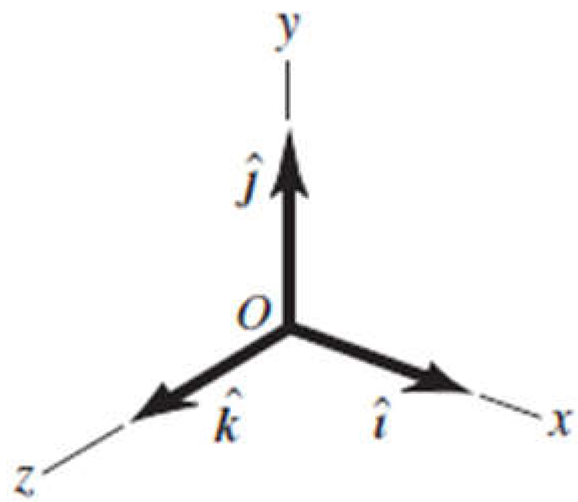
$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$$



Vector **A** de tres dimensiones escrito en función de sus 3 componentes:

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$$

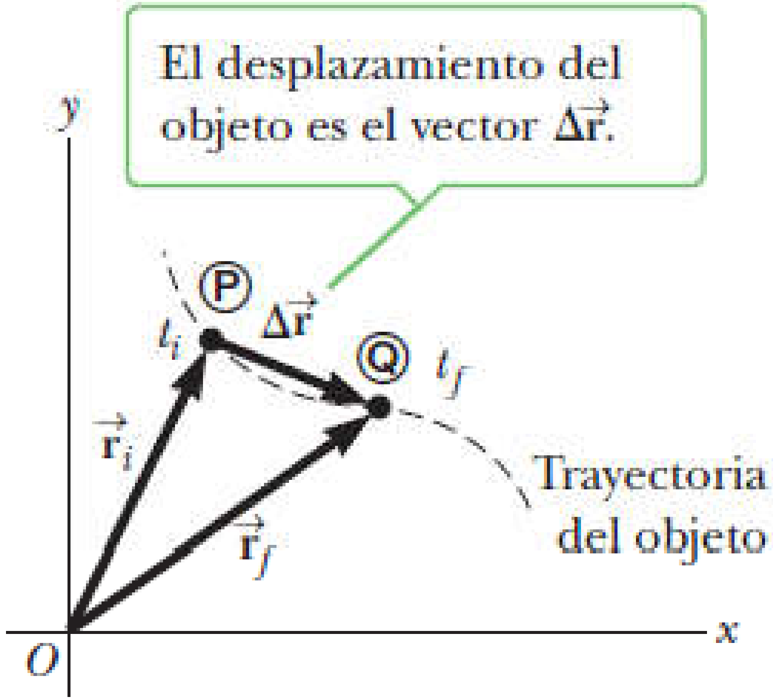
Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.



Cinemática en más de una dimensión

En más de una dimensión se debe hacer uso **completo del concepto vectorial**. Un objeto se mueve a través del espacio como se muestra en la figura.

Cuando el objeto está en el punto P en el tiempo t_i, *su posición se describe mediante* el **vector de posición** $\mathbf{r}_i$, *dibujado desde el origen hasta P. Cuando el objeto se ha* movido hacia algún otro punto en el tiempo t_f, *su vector de posición es* $\mathbf{r}_f$.

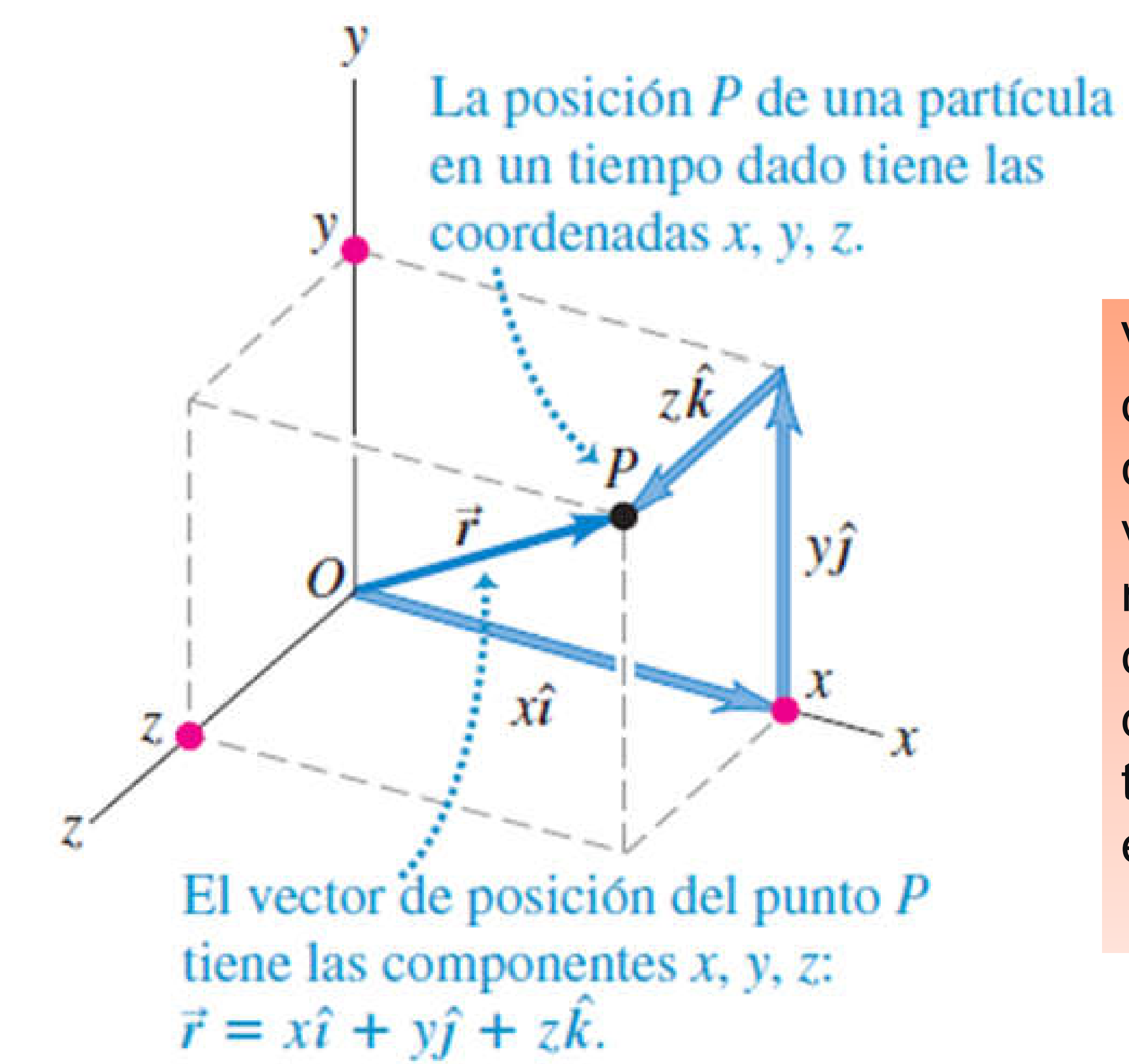


Del diagrama de la figura, el vector de posición final es la suma del vector de posición inicial y el desplazamiento Δ**r:**

$$\bar{r}_f = \bar{r}_i + \Delta\bar{r}$$

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Vector posición $\bar{r}$ de una partícula en un instante dado es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto *P*. Coordenadas *x*, *y* y *z* de *P* son las componentes *x*, *y* y *z* del vector.



$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

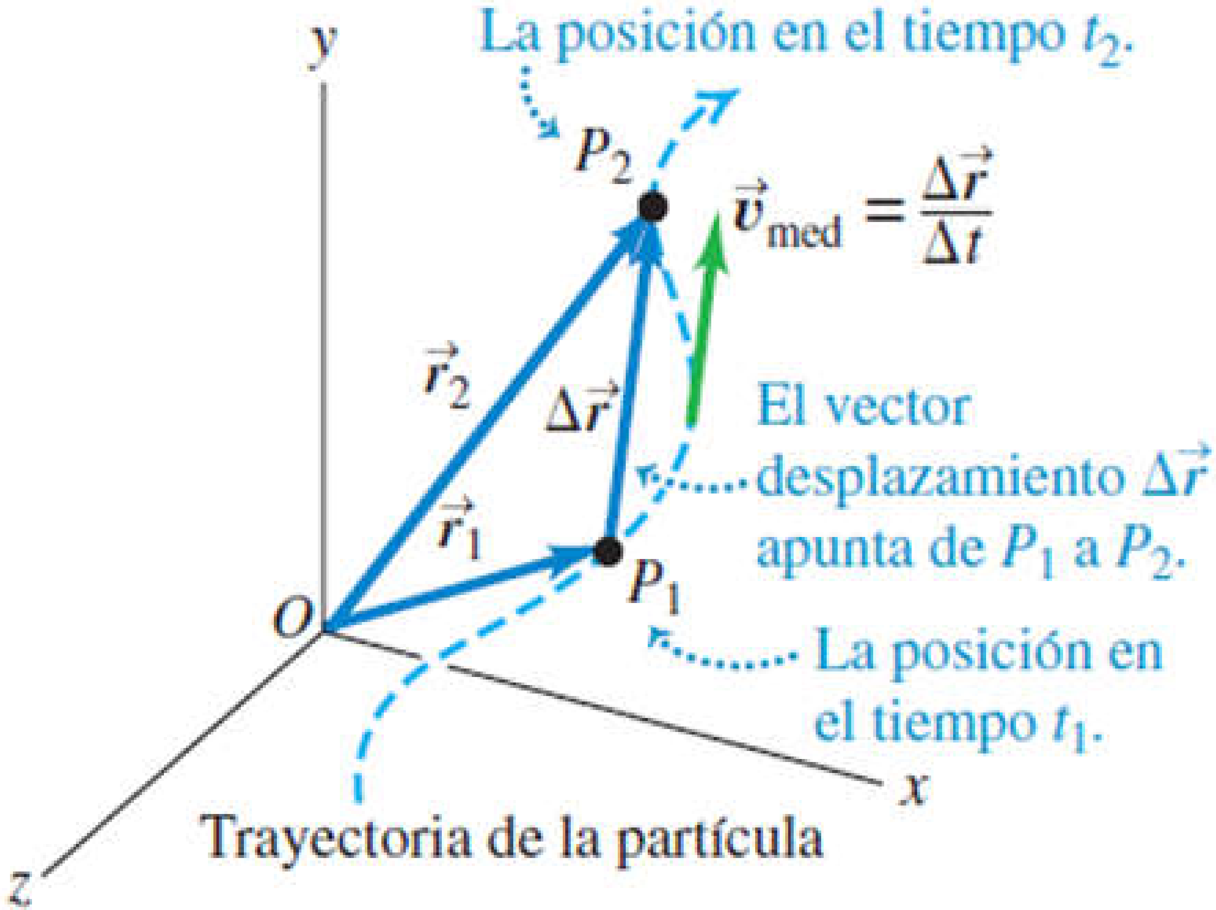
Vamos a extender las definiciones vistas en cinemática unidimensional de velocidades y aceleraciones medias e instantáneas al caso de dos y tres dimensiones. Pero ahora no trataremos a magnitudes escalares, sino vectoriales.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

En un Δt la partícula se mueve de P_1 a P_2.

Desplazamiento: $\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$



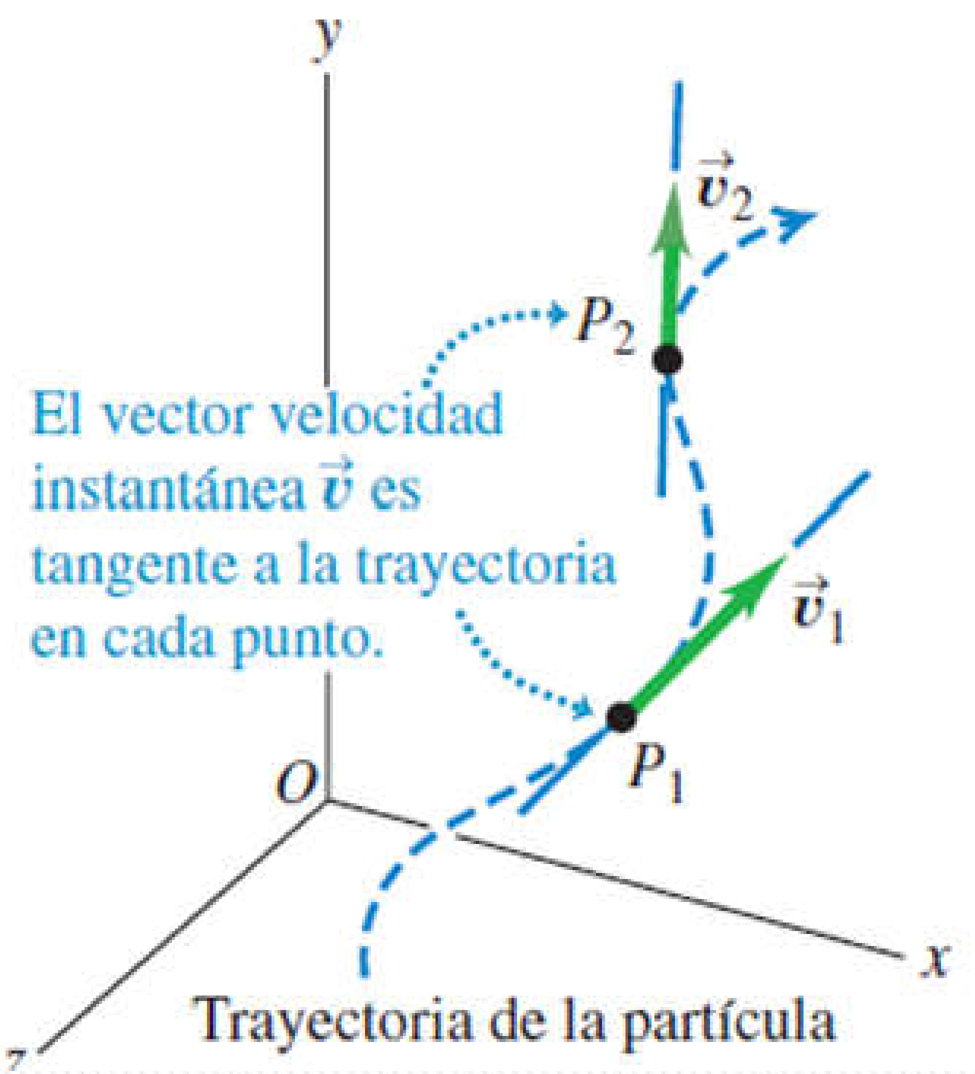
Velocidad media durante ese intervalo Δt:

$$\bar{v}_{med} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Rapidez media: es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo insumido. Es un escalar y no siempre coincide con el módulo de la velocidad media.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Definimos la **velocidad instantánea**: $\overline{\boldsymbol{v}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$



$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

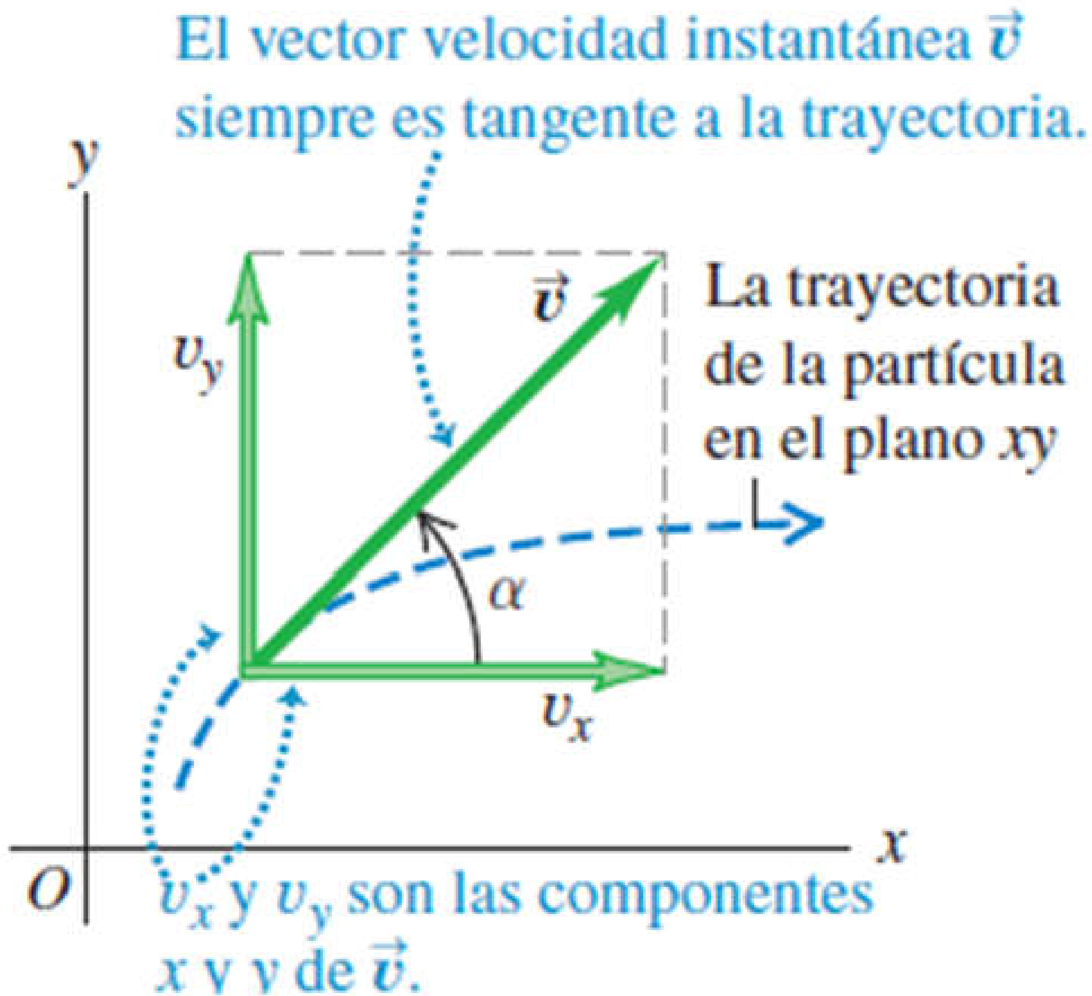
$$\overline{\boldsymbol{v}} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

El cualquier punto de la trayectoria, el vector es tangente a la trayectoria en ese punto, y el sentido es el del movimiento.

El módulo de $\overline{\boldsymbol{v}}$ es la **rapidez.**

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD



En dos dimensiones:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

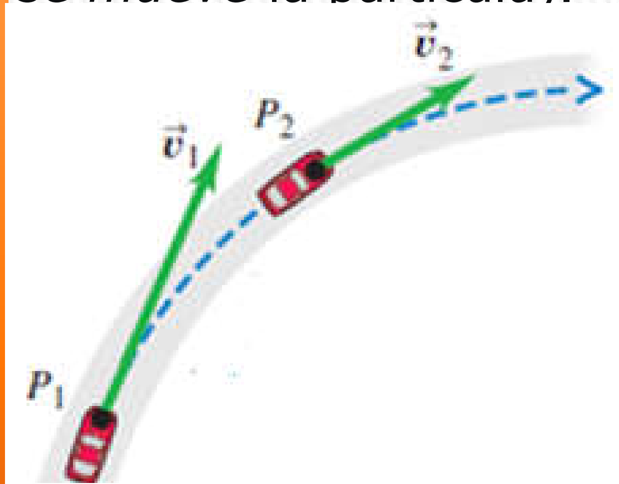
La dirección de la velocidad instantánea está dada por el ángulo α

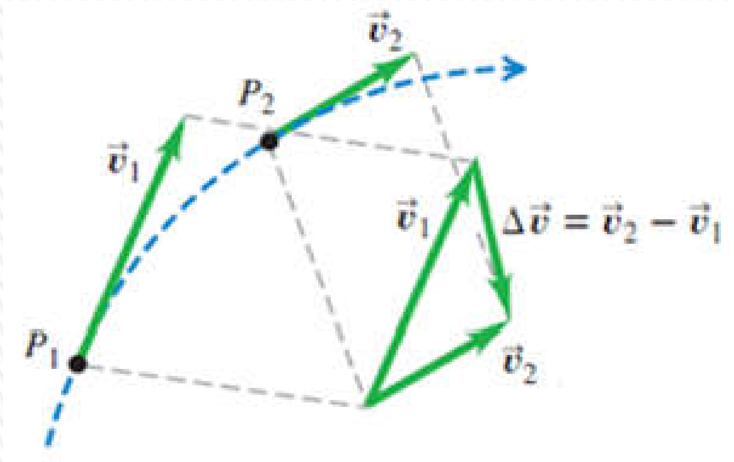
$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

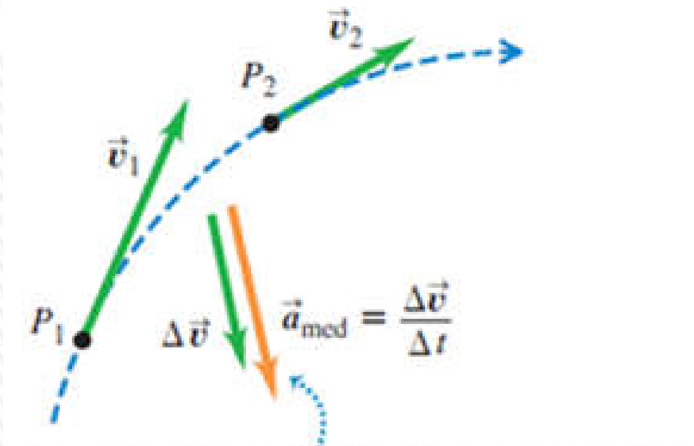
VECTOR ACELERACIÓN

La aceleración describe cómo cambia la velocidad.

La aceleración describe cambios *tanto en la magnitud de la velocidad (es decir,* la rapidez) *como en la dirección de la velocidad (la dirección en que se mueve* la partícula).







La aceleración media tiene la misma dirección que el cambio de velocidad, $\Delta\vec{v}$.

Definimos la **aceleración media**:

$$\overline{a}_{med} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{t_2 - t_1}$$

VECTOR ACELERACIÓN

Definimos **aceleración instantánea**:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k}$$

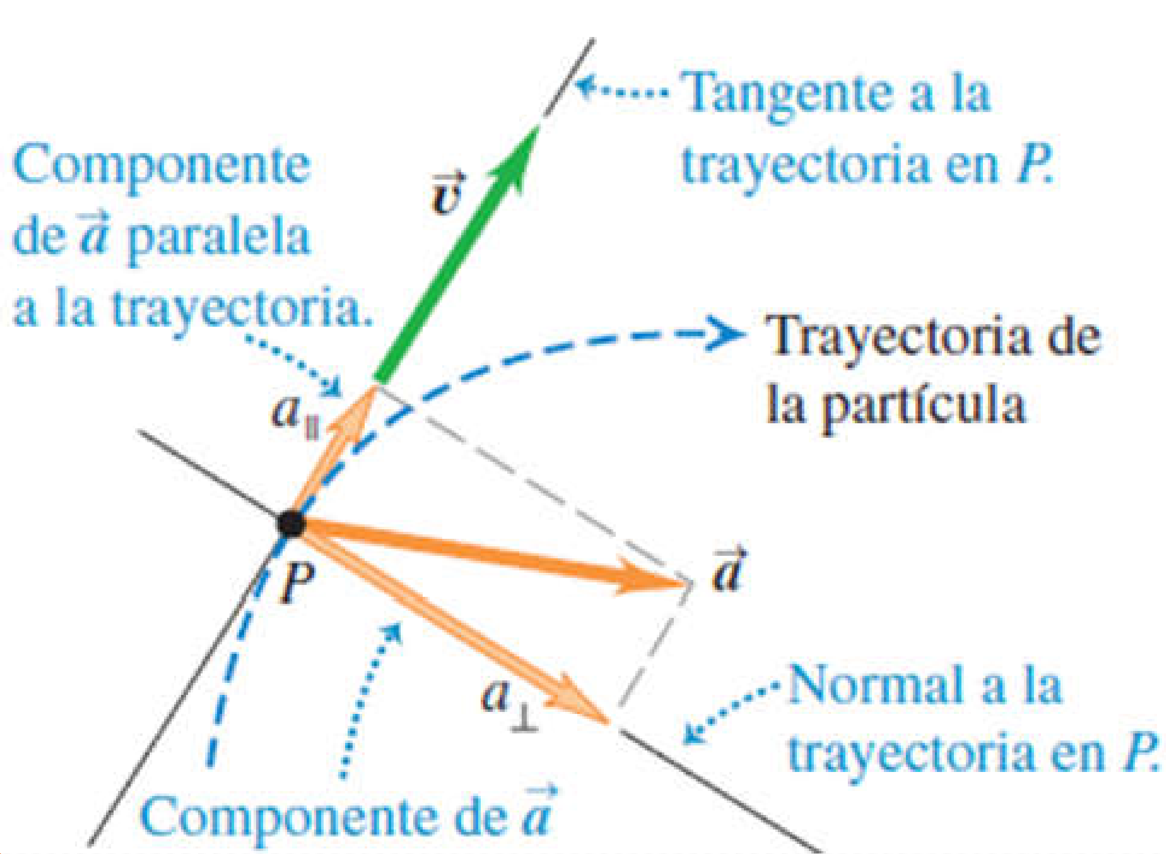
El vector **a** no *tiene por que ser tangente a la trayectoria.*

Si la trayectoria es curva, apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (interior de la curva descrita por la partícula).

La aceleración es tangente a la trayectoria solo si la partícula se mueve en línea recta.

Atención: Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando !!!

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN



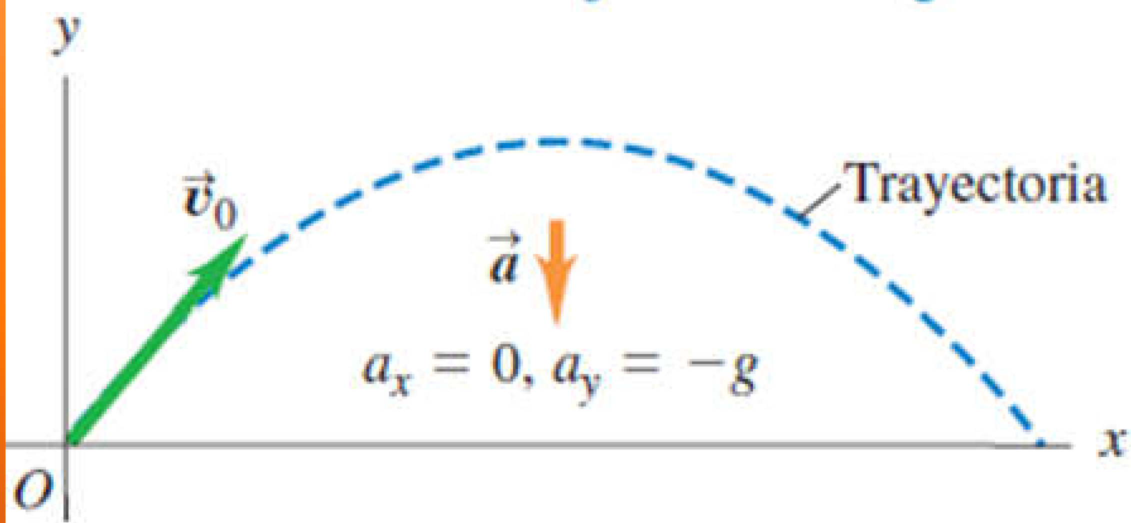
El vector $\overline{a}$ se puede visualizar en términos de una **componente *paralela a la trayectoria* de la *partícula* (paralela a la velocidad)**, y otra ***componente perpendicular a la trayectoria***, (perpendicular a la velocidad).

La **componente paralela** determina los **cambios en la *rapidez*** *de la partícula.*

La **componente perpendicular** indica los **cambios en la *dirección del movimiento*** de la partícula.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende solo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



Modelo:

•Proyectil como partícula.

•Aceleración gravedad constante tanto en magnitud como en dirección.

•Se ignoran efectos de la resistencia del aire, como curvatura y rotación de la Tierra.

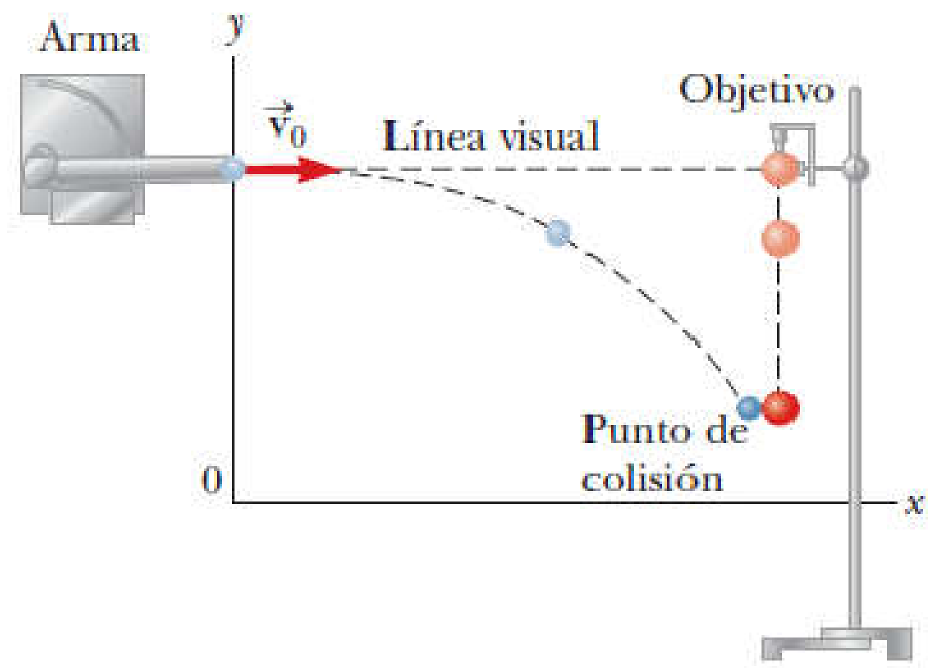
El movimiento del proyectil **siempre se limita a un plano vertical**, determinado por la dirección de la velocidad inicial.
La aceleración gravitatoria es exclusivamente vertical y no puede acelerar al proyectil de forma lateral.

Movimiento es *bidimensional*.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

El **movimiento de un proyectil** es **la superposición de dos movimientos:** uno **horizontal** y otro **vertical** independientes entre sí.

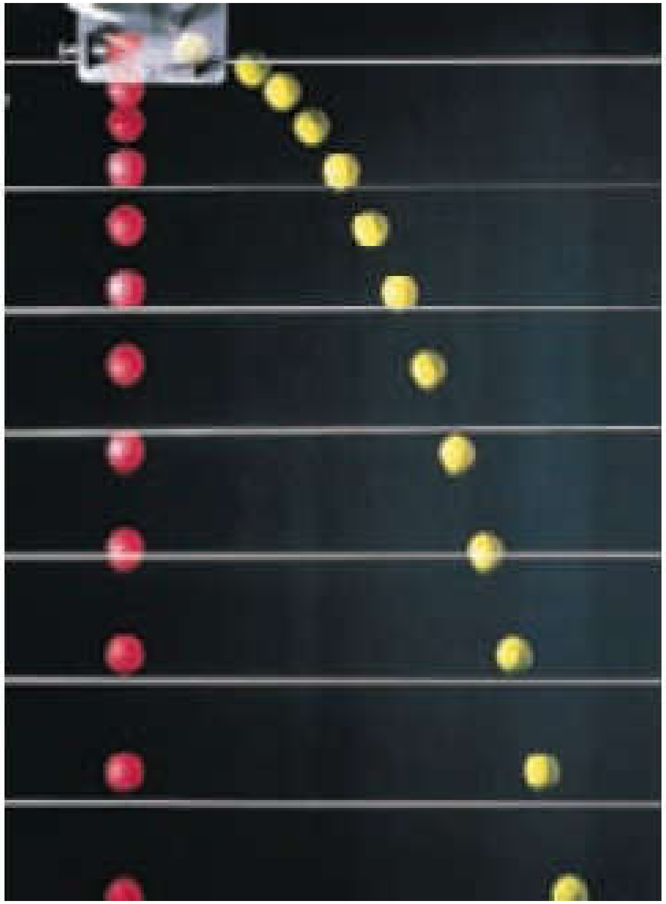
Se muestra un experimento que donde se ve la independencia del movimiento horizontal y vertical.
La pistola apunta directamente a la bola objetivo y es disparada en el instante en que ésta es liberada.
En ausencia de gravedad, el proyectil daría en el blanco porque el objetivo no se movería.
Sin embargo, el proyectil aún da en el blanco en presencia de la gravedad.



Eso significa que el proyectil está cayendo con el mismo desplazamiento vertical que el objetivo, a pesar de su movimiento horizontal.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferentes posición y velocidad en x.



Análisis del movimiento: trato por separado las coordenadas *x* y *y*.

Componente x de la aceleración es cero, y componente y es constante e igual a -g.

El movimiento de un proyectil es una combinación de:

- **movimiento horizontal con velocidad constante y,**
- **movimiento vertical con aceleración constante.**

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Ecuaciones de movimiento:

Como según x es un movimiento rectilíneo uniforme (a_x=0) y según y esun movimiento rectilíneo con aceleración constante (a_y= -g)

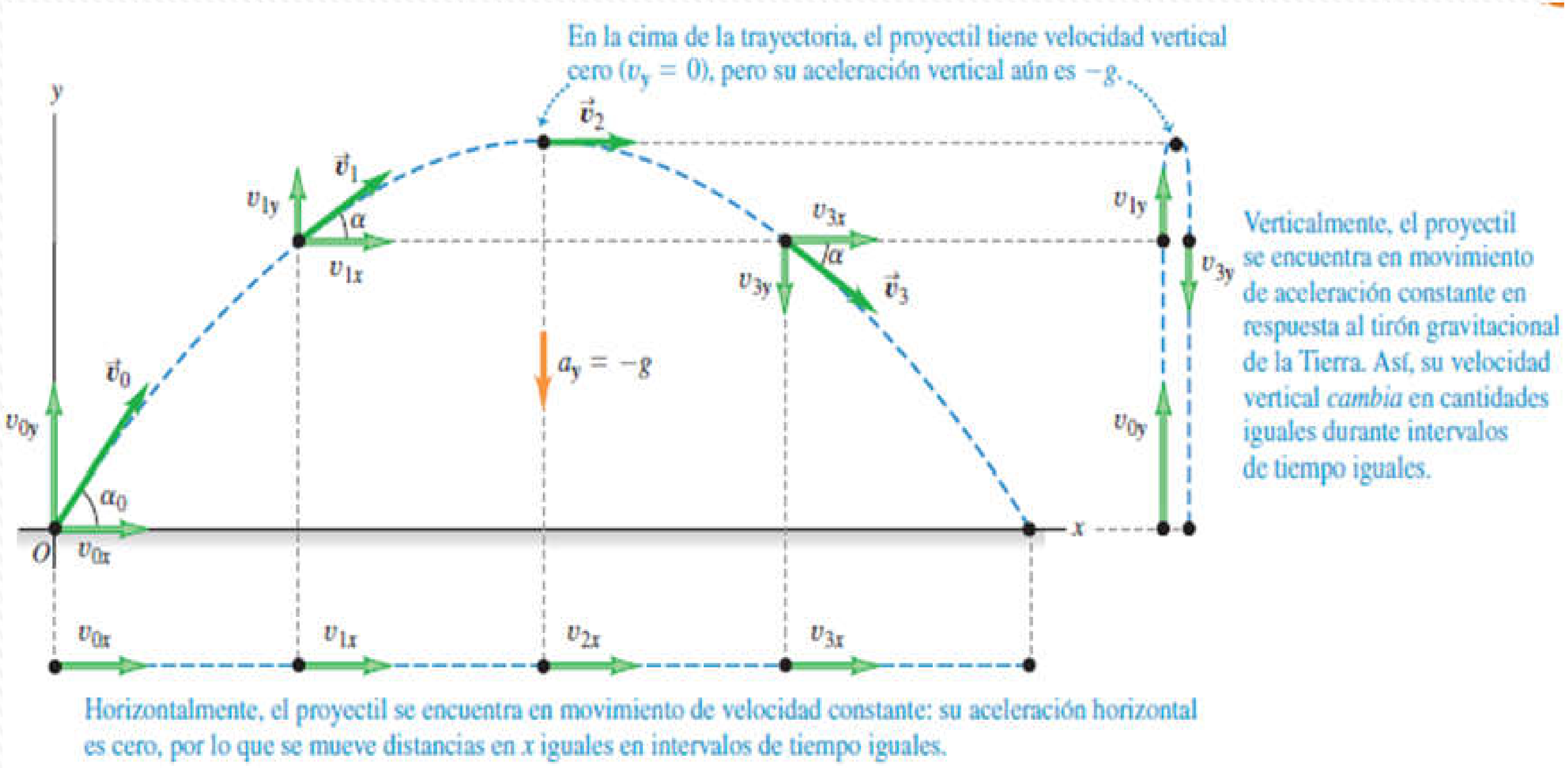
Aceleración: $a_x = 0$ $\qquad$ $a_y = -g$

Velocidad: $v_x = v_{0x}$ $\qquad$ $v_y = v_{0y} - gt$

Posición: $x = x_0 + v_{0x}\, t$ $\qquad$ $y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$v_{0x} = v_o \cos \alpha_0$ $\qquad$ $v_{0y} = v_o \sin \alpha_0$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Movimiento parabólico del modelo de proyectil

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Los hechos importantes del movimiento de un proyectil se pueden resumir como sigue:

1. Siempre que se omita la resistencia del aire, la componente horizontal de la velocidad v_x permanece constante porque no existe componente horizontal de la aceleración.

2. La componente vertical de la aceleración es igual a la aceleración en caída libre $-g$.

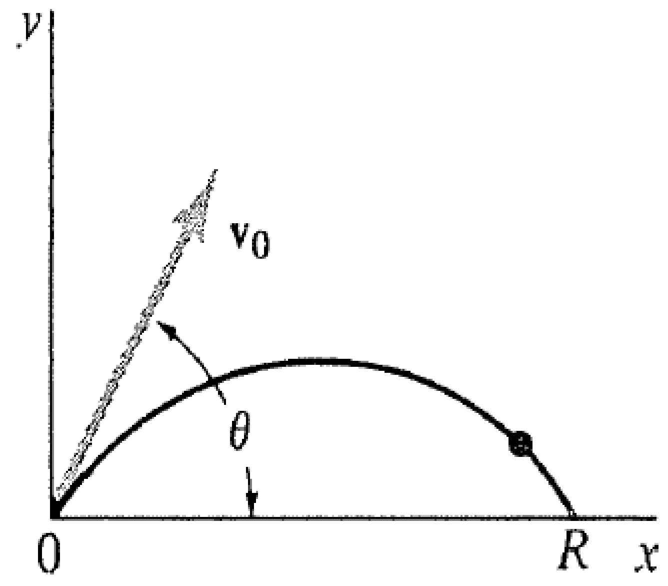
3. La componente vertical de la velocidad v_y y el desplazamiento en la dirección *y* son idénticos a los de un cuerpo en caída libre.

4. El movimiento de proyectil puede describirse como una superposición de dos movimientos independientes en las direcciones *x* y *y*.

ATENCIÓN: En la altura máxima que alcanza el proyectil sólo se anula la componente vertical de la velocidad, la componente horizontal permanece invariable.
La aceleración en la dirección *y* *tampoco* es cero en la parte superior de la trayectoria del proyectil. Sólo la componente *y* de la velocidad es cero.
Si la aceleración también fuera cero, ¡el proyectil jamás llegaría abajo!

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Deduciremos las ecuaciones vinculadas a la altura máxima alcanzada y el alcance máximo cuando se dispara un proyectil, y la altura de disparo es la misma que la de llegada:



La altura máxima, se alcanza cuando la componente vertical de la altura se anula. Llamaremos t* al instante en que esto se produce.

$$v_y = v_o \sin\theta - g t^* = 0 \qquad t^* = \frac{v_o \sin\theta}{g}$$

La altura máxima se acanza para ese instante:

$$h_{máx} = y(t^*) = v_o \sin\theta\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = v_o \sin\theta \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Como el tiempo de subida es el mismo que el de bajada, el alcance $R = x(2t^*)$

$$R = x(2t^*) = v_0 \cos\theta\,(2t^*) = v_0 \cos\theta \left(2\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$$

Teniendo en cuenta que: $2\sin\theta.\cos\theta = \sin 2\theta$

$$R = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Puede verse que:

El alcance máximo es cuando θ = 45° y vale:

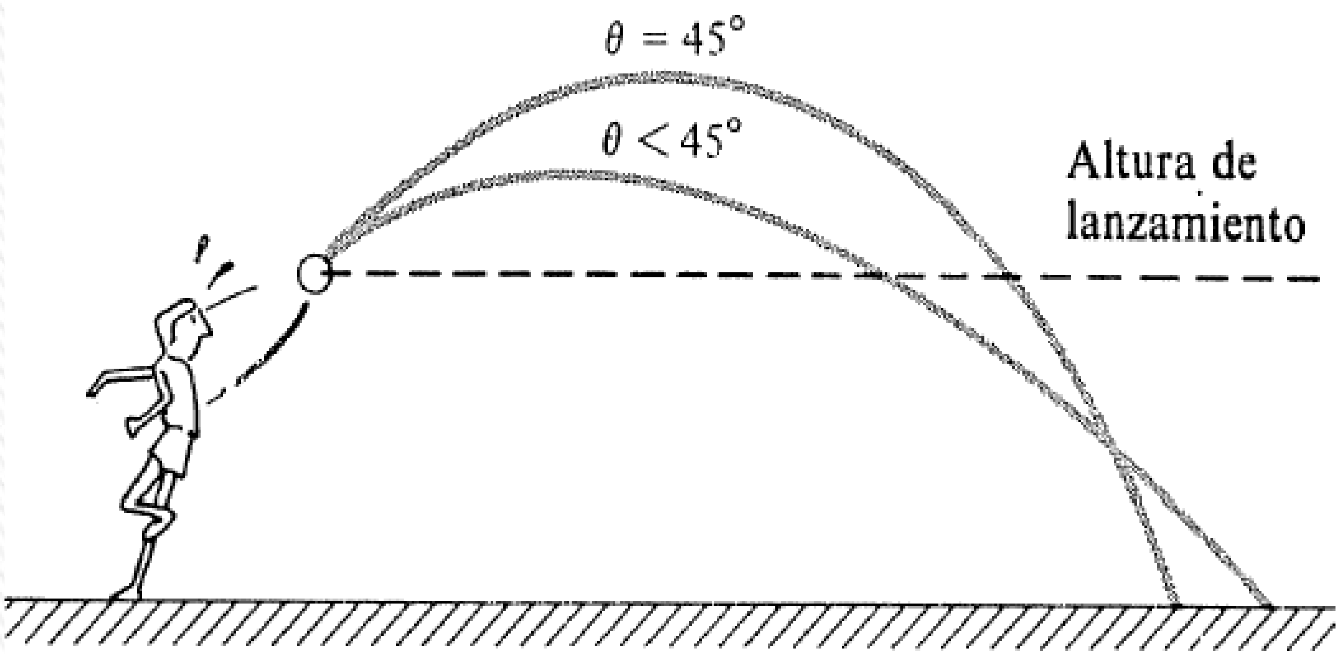
$$R_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$$

Como el seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario, los proyectiles lanzados desde una superficie plana con un ángulo θ y con un ángulo 90- θ y con la misma rapidez tienen el mismo alcance, pero a mayor ángulo de tiro, mayor altura y mayor tiempo de vuelo.

Esto es válido sólo si la altura de lanzamiento es la misma que la altura de llegada.

Veamos qué sucede cuando estas alturas son distintas.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

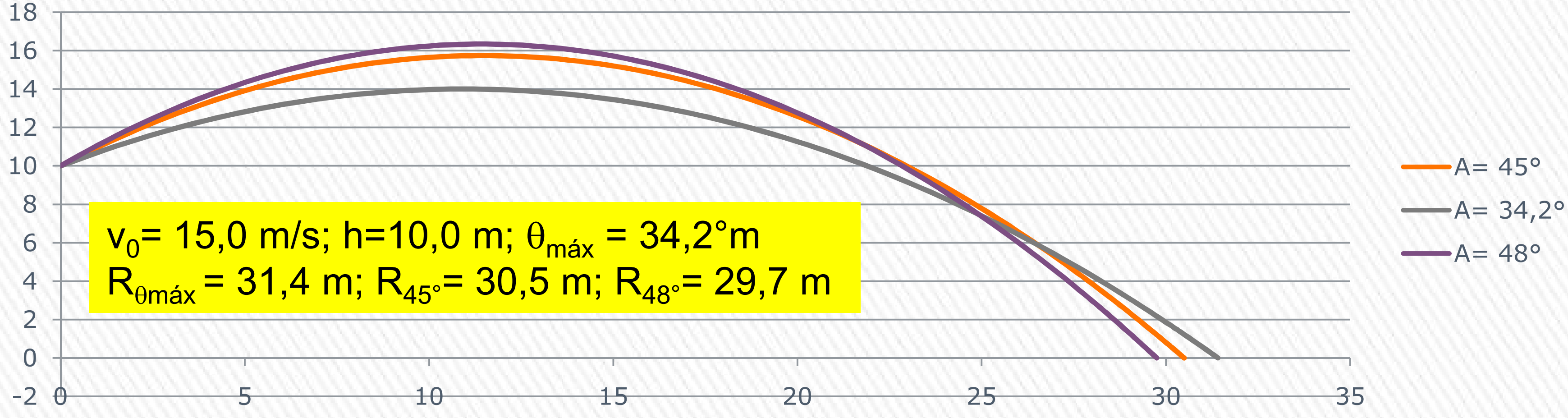


Lanzamiento efectuado por encima del nivel del suelo. La trayectoria para un ángulo de tiro de 45° y otro más pequeño se cortan por debajo de la altura de lanzamiento. La trayectoria más plana tiene un mayor alcance.
Si el punto de llegada está a mayor altura que el de lanzamiento, el alcance máximo se alcanza con un ángulo de lanzamiento mayor a 45°.

$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

h > o si el lanzamiento es a mayor altura que la de llegada: $\theta_{máx} < 45°$
h < o si el lanzamiento es a menor altura que la de llegada: $\theta_{máx} > 45°$

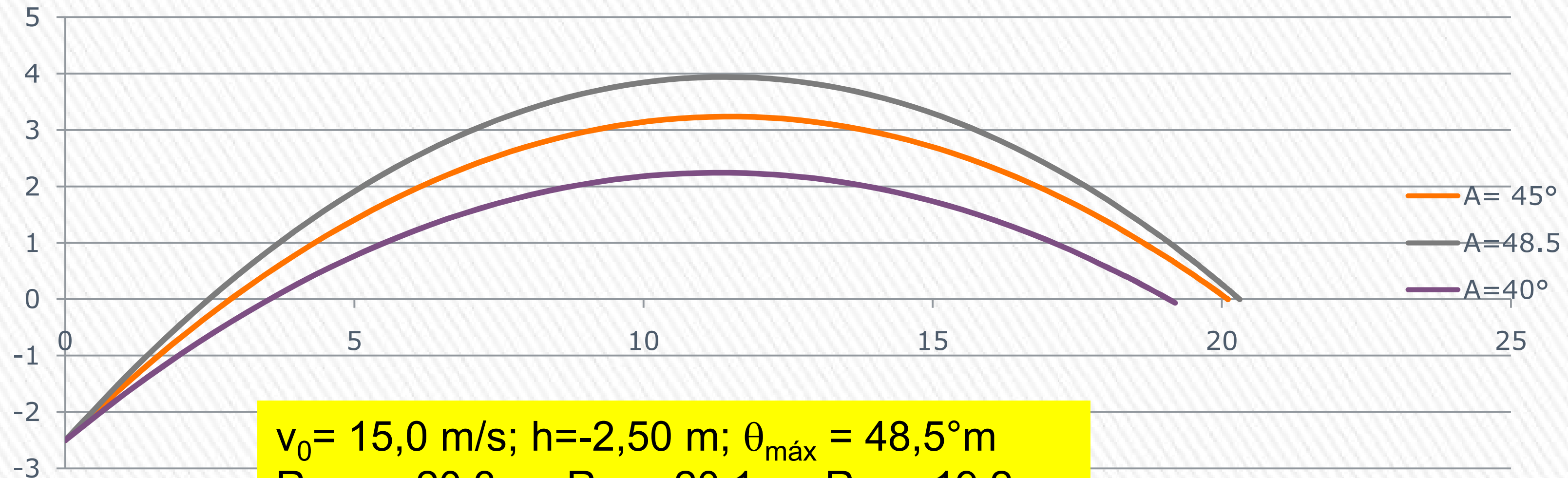
MOVIMIENTO DE PROYECTILES



v_0= 15,0 m/s; h=10,0 m; $\theta_{máx}$ = 34,2°m
$R_{\theta máx}$ = 31,4 m; $R_{45°}$= 30,5 m; $R_{48°}$= 29,7 m

Alcance máximo para lanzamiento h ≠ 0

$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$



v_0= 15,0 m/s; h=-2,50 m; $\theta_{máx}$ = 48,5°m
$R_{\theta máx}$ = 20,3 m; $R_{45°}$= 20,1 m; $R_{40°}$= 19,2 m

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Deducción de ecuación de la trayectoria: $y(x) = (\tan\alpha_0)x - \dfrac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0}\,x^2$

$$x = v_0 \cos\alpha_0\, t \qquad t = \frac{x}{v_0\cos\alpha_0}$$

$$y = v_0 \sin\alpha_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = v_0 \sin\alpha_0 \left(\frac{x}{v_0\cos\alpha_0}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0\cos\alpha_0}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{v_0\sin\alpha_0}{v_0\cos\alpha_0}\right) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0\cos\alpha_0)^2}$$

$$\boxed{y = \tan\alpha_0\, x - \frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha_0} x^2}$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Otras expresiones:

Módulo del vector posición: $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

Rapidez del proyectil (módulo de su velocidad): $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje +x: $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

Ecuación de la trayectoria (parábola): $y(x) = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0} x^2$

Para lanzamiento con altura de lanzamiento igual al de llegada:

Tiempo en que se alcanza la altura máxima: $t^* = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$

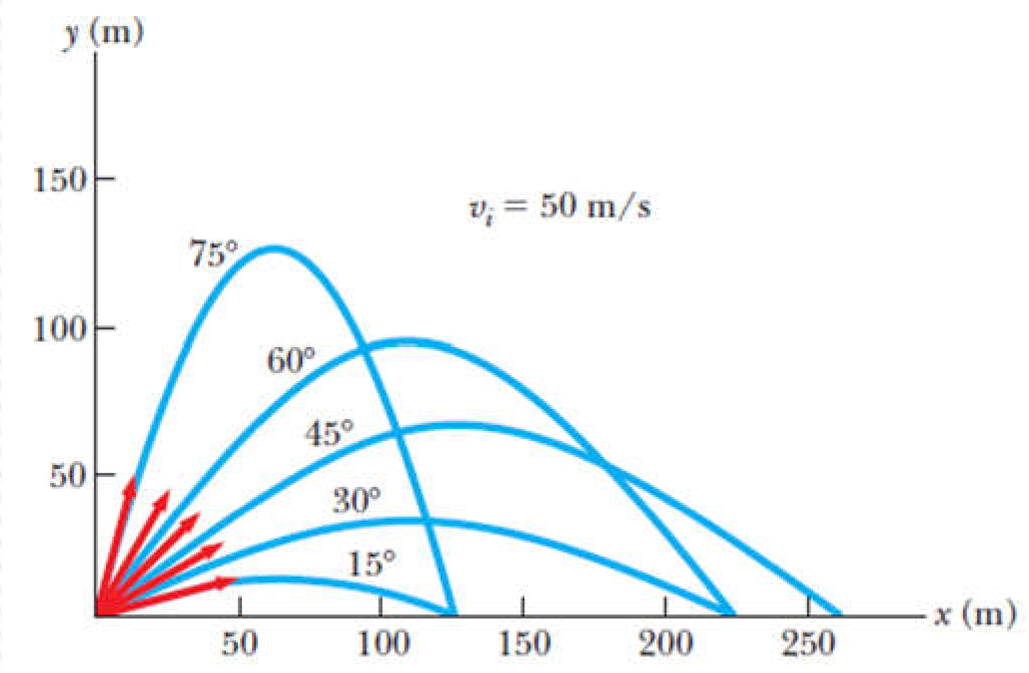
Altura máxima alcanzada: $h_{max} = y(t^*) = \frac{v_0^2 sin^2\alpha_0}{2g}$

Alcance: $R = x(2t^*) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$

Alcance máximo para $\alpha_0 = 45º$ $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

PREGUNTA RÁPIDA

Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.



Respuesta: El tiempo de vuelo estará dado por la componente vertical de la velocidad inicial, cuanto mayor sea, mayor será el tiempo de vuelo. Por tanto a mayor ángulo, mayor tiempo de vuelo.

Cuestionarios rápidos:

1) Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire.

¿Hay un punto donde $\overline{a}$ sea paralela a $\overline{v}$? **NO.**

¿Y perpendicular a $\overline{v}$? **SI, en el punto donde alcanza la altura máxima ($v_y = 0$)**

2) En el instante en que usted dispara una bala horizontalmente con un rifle, deja caer otra bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo?

Las dos al mismo tiempo!!!

3) Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. *Al llegar a su máxima altura,* ¿cuáles son su vector velocidad, su rapidez y su vector aceleración?

$\overline{v} = v_0 \cos\theta \ \hat{\imath}$ $\qquad v = v_0 \cos\theta$ $\qquad \overline{a} = -g\ \hat{\jmath}$

Ejemplo: Ejercicio 2.15

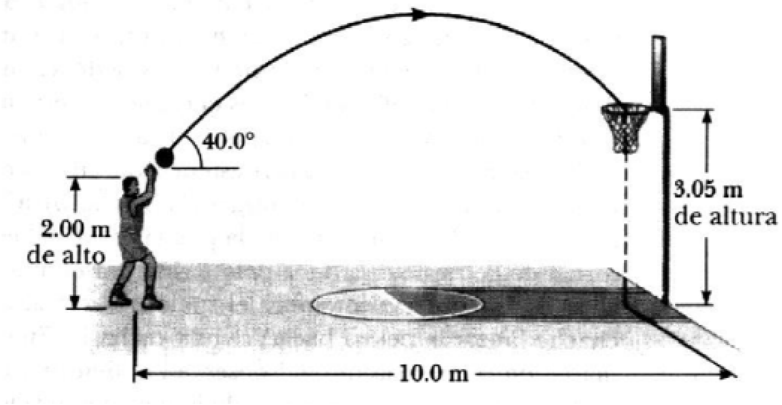
15.- Se lanza horizontalmente una pelota con velocidad v_0 desde una altura *h* y otra se deja caer al mismo tiempo desde la misma altura.
¿Cuál de las dos llegará primero al suelo?
¿Cuál de las dos tendrá un mayor módulo de la velocidad al llegar al suelo?

1- Ambas llegan al suelo al mismo tiempo, pues ambas tienen la misma velocidad en el sentido vertical. .

2- La que se lanza en forma horizontal tendrá mayor módulo de velocidad.
Esto es debido a que esta pelota tiene una componente horizontal de velocidad que la otra no tiene.

Ejemplo: Ejercicio 2.17

17.- Un jugador de básquetbol de 2,00 m de altura lanza un tiro al aro que está a 3,05 m de altura, desde una distancia de 10,0 m con un ángulo de 40º respecto a la horizontal. ¿Con qué velocidad inicial debe tirar de manera que la pelota entre al aro sin tocar el tablero?



Ecuación de la trayectoria: $$y = \tan\theta\, x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} = \tan\theta\, x - y \qquad \frac{g x^2}{\tan\theta x - y} = 2 v_0^2 \cos^2\theta \qquad \frac{g x^2}{2\cos^2\theta(\tan\theta x - y)} = v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{g x^2}{\tan\theta\, x - y}} = \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(\tan\theta\, x - y)}}$$

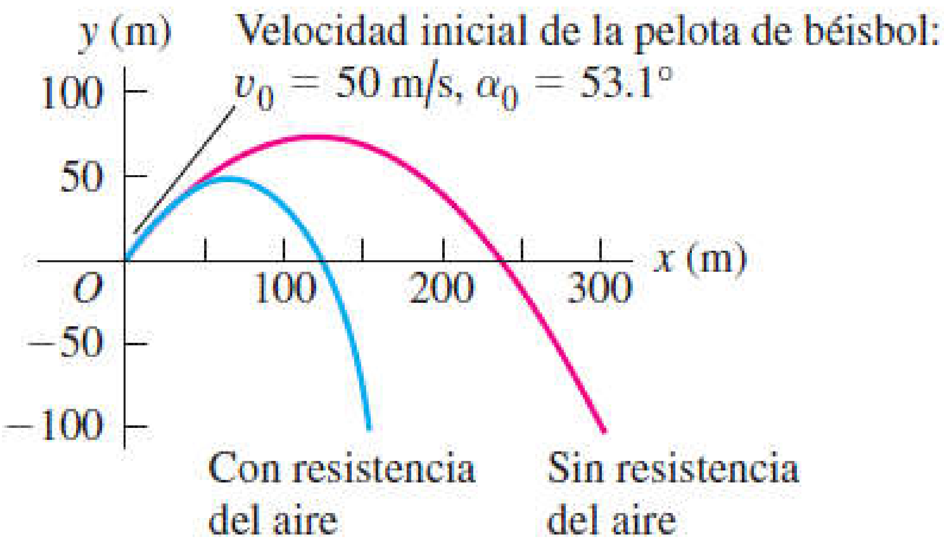
Tomo como origen el punto de lanzamiento…. Entonces el aro está en x= 10,0 m e y= 1,05 m

$$v_0 = \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(\tan\theta\, x - y)}} = \frac{10{,}0}{\cos 40{,}0^\circ}\sqrt{\frac{9{,}8}{2(\tan 40{,}0^\circ \times 10{,}0 - 3{,}05)}} = 10{,}7\ m/s$$

BALÍSTICA CON RESISTENCIA DEL MUNDO REAL

Efecto de la resistencia del aire

3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



La fricción del aire tiene un efecto apreciable sobre los proyectiles, en especial los que son *ligeros y rápidos;* **la resistencia es proporcional al *cuadrado de la velocidad.***

Una pelota de béisbol bien bateada, que dure mucho en el aire, puede perder hasta la mitad de su rapidez inicial, y llegar sólo un poco más allá de la mitad de lo que hubiera llegado sin fricción.

Una bala de rifle (sólo con unos 150 g de masa) disparada a 0,6 km/s, lo cual es bastante, sufrirá mucho la fricción. Si no hubiera resistencia, tendría un alcance máximo tremendo de unos 40km.

Debido a la resistencia del aire, no es probable que la bala llegue mucho más allá de 4 km.