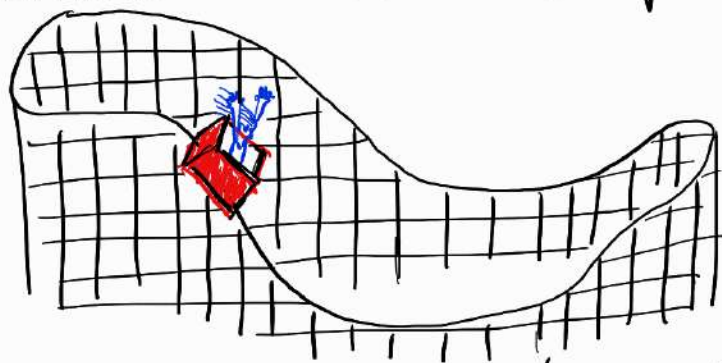
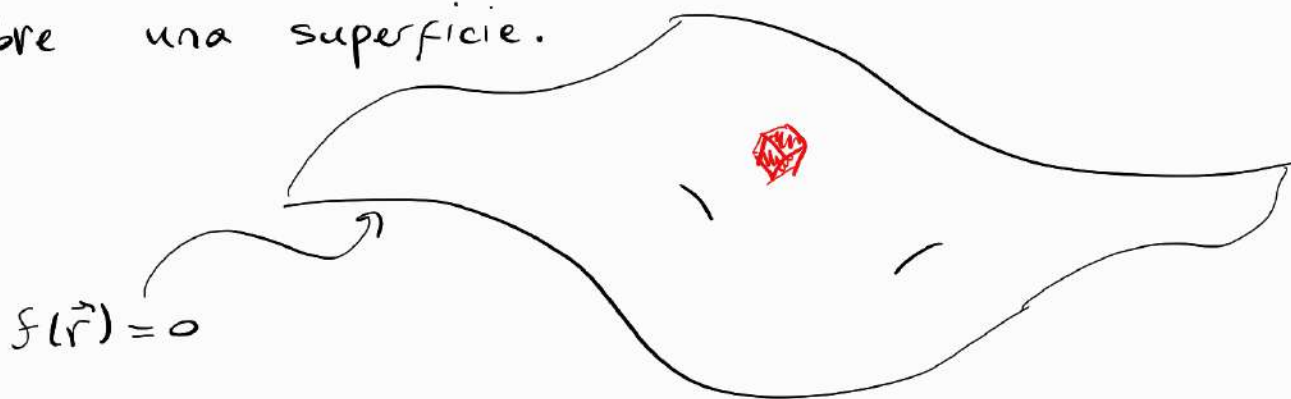


Sistemas vinculados

Muchas veces, conocemos ciertas restricciones al movimiento pero no conocemos las fuerzas que provocan dichas restricciones. Estas restricciones suelen denominarse vínculos o ligaduras. Un ejemplo de esta situación es el carrito de la montaña rusa que está restringido a moverse siempre sobre la vía.



Otro ejemplo de esto es el de un bloque moviéndose sobre una superficie.



En este segundo caso, podemos identificar la superficie mediante una ecuación de la forma

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) = 0$$

Por ejemplo,

- la ecuación de un plano es:

$$Ax + By + Cz = D$$

- la ecuación de una esfera es:

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2 = R^2$$

A la fuerza que mantiene dicho vínculo la denominamos fuerza de ligadura o fuerza de vínculo.

En el caso del movimiento sobre una superficie definida mediante $f(\vec{r})=0$, la fuerza de ligadura es de la forma

$$\vec{F}_{lig} = \lambda \nabla f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right)$$

ya que ∇f es perpendicular a la superficie en cuestión en cada punto. De esta forma la segunda ley de la mecánica Newtoniana para una partícula moviéndose sobre la superficie toma la forma:

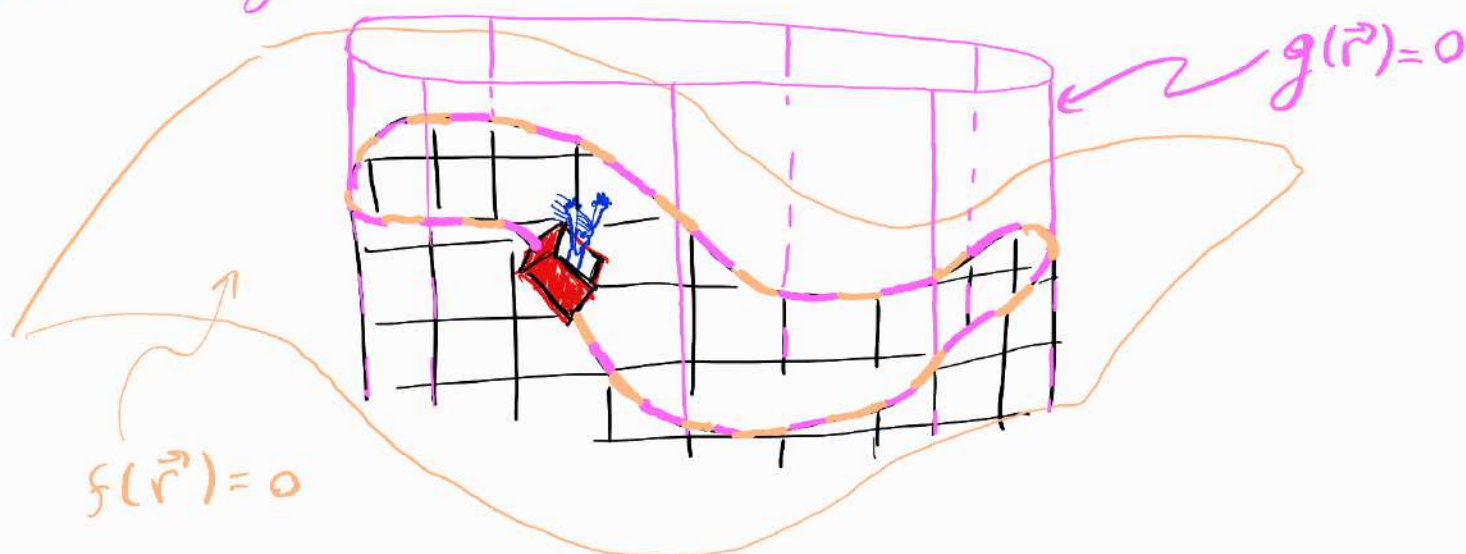
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{apl} + \lambda \nabla f$$

típicamente denotamos esta fuerza con $\vec{N}$

Ojo! a veces la restricción aplica en un solo sentido lo cual fija el signo de λ

En el caso del movimiento sobre una curva, para determinar ésta podemos escribir esto como la intersección de 2 superficies

$$f(\vec{r})=0 \text{ y } g(\vec{r})=0.$$



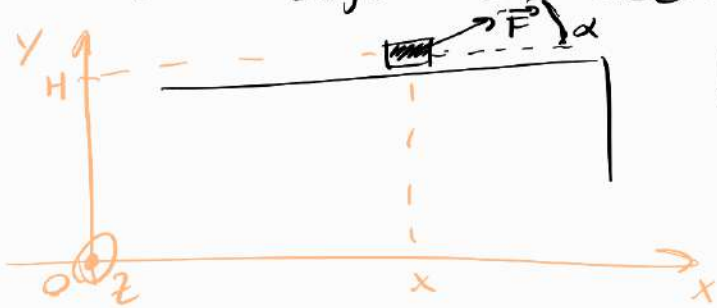
En esta situación las fuerzas de ligadura pueden ser en cualquier dirección perpendicular a la curva, es decir que será de la forma:

$$\vec{F}_{lig} = \lambda \nabla f + \mu \nabla g = \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \right) \hat{i} + \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} \right) \hat{j} + \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} \right) \hat{k}$$

y la 2^{da} ley toma la forma

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{apl} + \underbrace{\lambda \nabla f}_{\vec{N}_1} + \underbrace{\mu \nabla g}_{\vec{N}_2} \quad \text{o} \quad \vec{N}_1 + \vec{N}_2 \equiv \vec{N}$$

Ejemplo 1: una masa sobre una superficie se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$



$$\vec{g} = -g\hat{j} \quad f(\vec{r}) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \nabla f = \hat{j} \\ y - H = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{N} = \lambda \hat{j}$$

(si la restricción es que $y \geq H \Rightarrow \boxed{\lambda \geq 0}$)

$\Rightarrow$ la ecuación de movimiento toma la forma

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + m\vec{g} + \lambda \hat{j}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} = F \cos \alpha$$

$$m \ddot{y} = F \sin \alpha + \lambda - mg$$

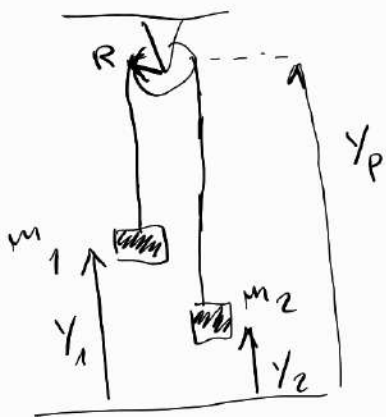
$$m \ddot{z} = 0$$

$$\text{como } y = H \Rightarrow \ddot{y} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = mg - F \sin \alpha$$

(si fuera $F \sin \alpha > mg$ no se cumpliría el vínculo $y \geq H$ ya que $\lambda < 0$, en este caso λ debería fijarse a 0 ya que la mesa no realiza fuerza hacia abajo sobre la partícula)

Ejemplo 2: consideremos dos cuerpos vinculados por una cuerda de largo l , inextensible y sin masa que pasa por una polea sin masa



el largo de la cuerda l es

$$(y_p - y_1) + (y_p - y_2) + \pi R - l = 0 \rightarrow f(y_1, y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dy_2}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{d^2 y_2}{dt^2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \nabla_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \hat{k} = -\hat{j}$$

$$\nabla_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z_2} \hat{k} = -\hat{j}$$

La 2^{da} ley de la mecánica para ambas masas es:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_1 g \hat{j} + \lambda_1 \nabla_1 f \leftarrow \vec{T}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -m_2 g \hat{j} + \lambda_2 \nabla_2 f \leftarrow \vec{T}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g - \lambda_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g - \lambda_2 \end{array}$$

como la cuerda es sin masa, y la pdaa también,
por acción y reacción entre los diferentes cuerpos, concluimos
que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \equiv -T$ (es decir, $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 \equiv \vec{T} = T \hat{j}$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow (I) \ddot{y}_1 &= -g + \frac{T}{m_1} \\ (II) \ddot{y}_2 &= -g + \frac{T}{m_2} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{usando} \\ \text{y haciendo} \\ (I) + (II) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= -2g + T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \\ \Rightarrow T &= \frac{2g m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Fuerzas de fricción

Muchas veces las fuerzas involucradas en los vínculos no son solo de la forma $\vec{F} / \vec{F} \cdot \nabla f = 0$ y se oponen el movimiento relativo.

Dichas fuerzas son las de fricción y, empíricamente, toman la forma:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{roz} &= -\mu_c N \hat{v}_{rel} & \text{si } \vec{v}_{rel} \neq 0 \\ |\vec{F}_{roz}| &\leq |\mu_e N| & \text{si } \vec{v}_{rel} = 0 \text{ con el sentido} \\ & & \text{y dirección de oponerse al intento} \\ & & \text{de mov. relativo si ésta no} \\ & & \text{estuviera} \end{aligned}$$

Empíricamente se constata que $\mu_e \approx \mu_c$

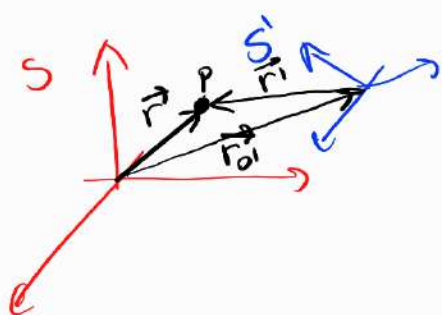
I.3.3 - Fuerzas en sistemas no inerciales

Las leyes de la mecánica Newtoniana refieren a la situación en sist. inerciales. Sin embargo, muchas veces resulta útil trabajar en sist no inerciales. Lo cierto es que nunca estamos en un sist inercial, incluso para el cálculo de ciertas cantidades, el caracter inercial del sistema depende del grado de precisión de la medida a realizar

Por ejemplo, para un Ing. civil o un arquitecto la tierra es un sistema suficientemente inercial, sin embargo para un astrónomo esto es impensable. Incluso para los fenómenos climáticos de grandes escalas, la rotación de la tierra es muy relevante.

Para trabajar en un sistema no inercial vamos a hacer uso de los resultados que obtuvimos al estudiar las descripciones entre sistemas con movimiento relativo.

Recordemos que del caso general de 2 sistemas S y S'



la posición, velocidad y aceleración de una partícula P es

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T \quad \text{siendo } \vec{v}_T = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_c \quad \text{siendo } \vec{a}_T = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \text{y } \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Ahora bien, la segunda ley de la mecánica Newtoniana para una partícula de masa m dice que en un sistema inercial es:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{neto}}$$

siendo $\vec{F}_{\text{neto}}$ la fuerza neta resultante de la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas a la partícula

$\Rightarrow$ En un sistema no inercial S' es:

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{neto}} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c}$$

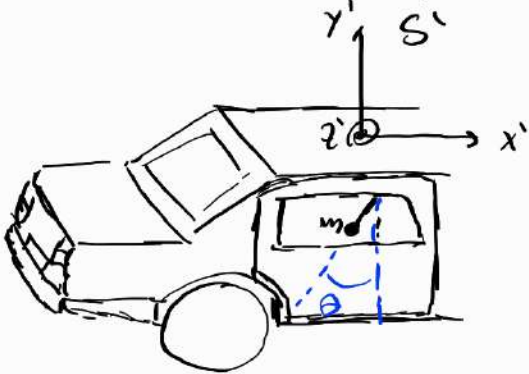
Los términos $-m\vec{a}_c$ y $-m\vec{a}_T$ forman lo que llamamos fuerzas ficticias $\vec{F}_{\text{fic}}$ o no inerciales. El ejemplo más popular de esto es la denominada fuerza centrífuga que nos "empuja" hacia un lado cuando vamos en un auto u omnibus y éste dobla.

Es importante destacar que las fuerzas ficticias no son realmente fuerzas sino que surgen por el hecho de realizar las mediciones desde un sistema no inercial

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1:

Una persona sostiene un péndulo de masa m y largo l mientras está sentada en un auto que acelera con $\vec{a}_0 = \text{cte}$ al ponerse la luz verde en el semáforo



Visto desde el sistema S la segunda ley de Newton se lee

$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$ siendo $\vec{T}$ la tensión del hilo y $m\vec{g}$ el peso

$$m\vec{a} = m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = T\sin\theta\hat{i} + T\cos\theta\hat{j} - mg\hat{j}$$

Pero $\ddot{x} = a_0$ $\ddot{y} = 0$ $\ddot{z} = 0$ (podríamos escribir una ecuación genérica de evolución, pero busquemos una solución tal que el péndulo está en reposo en S')

$$\Rightarrow \begin{cases} T\sin\theta = ma_0 \\ T\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{a_0}{g}\right)$$
$$T = m\sqrt{a_0^2 + g^2}$$

Visto desde S' planteamos

$$m\vec{a}' = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$$

$$\vec{a}' = 0 \Rightarrow \vec{a}_T = \vec{a}_0, \quad \vec{a}_c = 0$$

buscamos solución en reposo en S' , entonces es $\vec{a}' = 0$.

De donde concluimos que:

$$0 = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 \quad \text{que reordenando nos lleva a } (*)$$