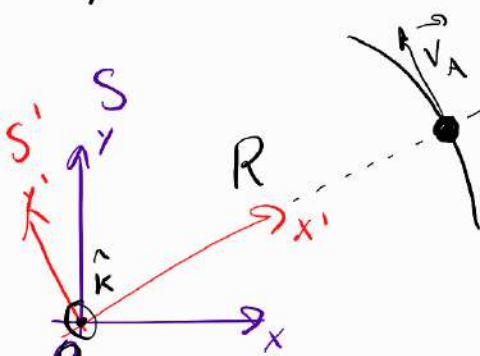


Ejemplo 2: siguiendo el ejemplo del auto,

si este toma una curva, de radio de curvatura $R = \text{cte}$ y centro O , con velocidad $\vec{V}_A = V_A \hat{e}_\phi$, con $V_A = \text{cte}$

Visto desde S

 $\Rightarrow$ Para el auto, la segunda ley de la mecánica es:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{roz}$$

como $\vec{g} = -g\hat{k}$, $\vec{N} = N\hat{k}$

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{k}$$

letra

$$\left(\ddot{\phi} = 0 \text{ ya que } \vec{V}_A = \dot{R}\hat{e}_\rho + R\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{k} \right)$$

$V_A = \text{cte} \Rightarrow \dot{\phi} = \text{cte} \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$

$$\Rightarrow -m \frac{V_A^2}{R} \hat{e}_\rho = \vec{F}_{roz}, \quad N = mg$$

Visto desde S' la segunda ley de la Mecánica Newtoniana

es: $m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_r - m\vec{a}_c$

Ahora bien, $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{roz}$
 tenemos que:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k}, \quad \dot{\vec{\omega}} = 0 \quad \gamma \quad \vec{a}_{o'} = 0 \quad \left\{ \Rightarrow 0 = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{roz} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right.$$

Además $\vec{v}' = 0 \quad \gamma \quad \vec{a}' = 0$

como $\vec{r}' = R\hat{i}' \quad \gamma \quad \hat{k}' = \hat{k} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}' = \dot{\phi}R\hat{j}'$

$$\gamma \Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\dot{\phi}^2 R \hat{i}' = -\frac{V_A^2}{R} \hat{i}'$$

$\Rightarrow$ nuevamente despejando obtenemos

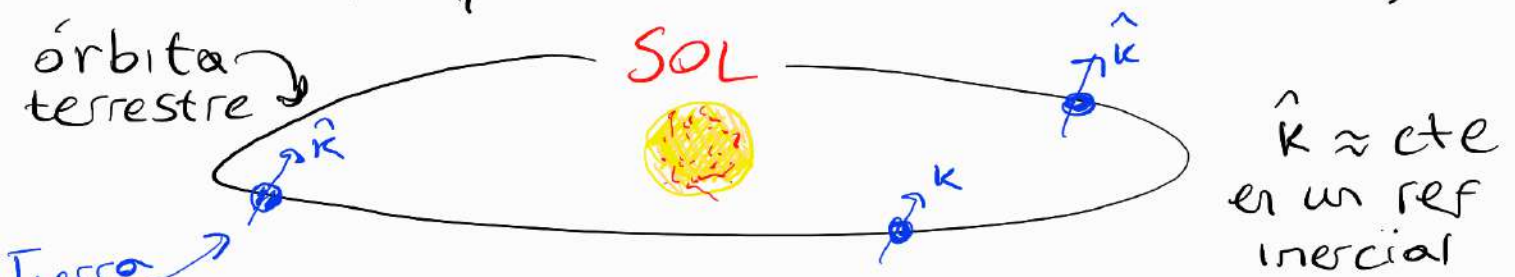
$$N = mg \quad \gamma \quad \vec{F}_{roz} = -m \frac{V_A^2}{R} \hat{i}' = -m \frac{V_A^2}{R} \hat{e}_\rho$$

Ejemplo 3 - Rotación de la Tierra y gravedad.

En primer lugar modelamos o realizamos ciertas consideraciones respecto del movimiento de la Tierra

- la velocidad angular de la Tierra es $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{24 \text{ horas}} \hat{k} \approx 7,2722 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \hat{k}$

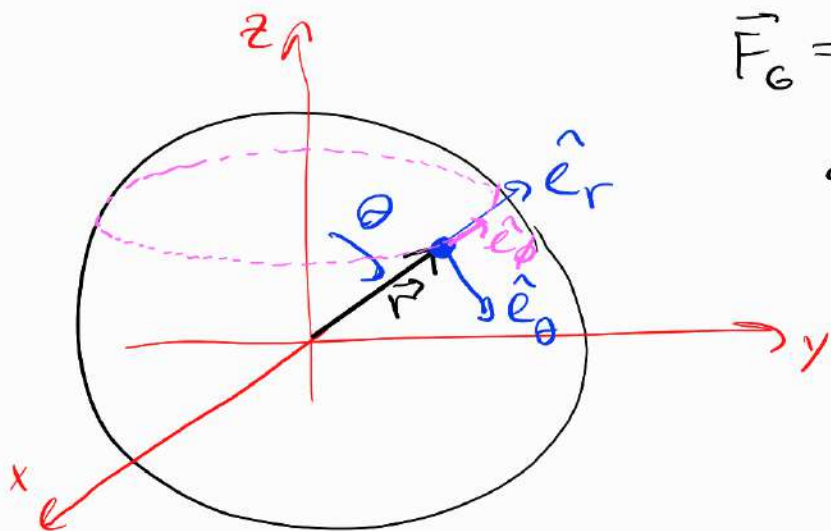
- además, se tiene que $\dot{\vec{\omega}} \approx 0$ (despreciamos la precesión de la Tierra que hace variar la dirección de $\vec{\omega}$)



siendo que este precesa con un ciclo de 26×10^3 años = 227 760 000 horas !!

(a comparar con los 24 hrs)

- la Tierra no tiene forma esférica, sin embargo su deformación no es tan grande y no es una mala aproximación que la atracción gravitatoria sobre un cuerpo en su superficie es de la forma:



$$\vec{F}_G = -G \frac{M_T m}{r^2} \hat{e}_r$$

siendo $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

y $M_T \approx 5,9722 \times 10^{24} \text{ kg}$

(además $R_T \approx 6,378 \times 10^6 \text{ m}$)

En tal caso, para una partícula realizando un movimiento proyectil, visto desde un referencial solidario a la Tierra S' , es

$$\begin{aligned}
 m\vec{a}' &= m\vec{a} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c \\
 &= -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_r - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'
 \end{aligned}$$

Despreciamos
aceleraciones de rotación en
torno al sol, etc

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \underbrace{-\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_r - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{m\vec{g}!!} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{e}_r - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}$$

Pero la dirección de $\vec{g}$ define la vertical local y se aparta de $\hat{e}_r$:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \omega^2 r [\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{e}_r)]$$

$$\hat{k} = \cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \hat{k} \times \hat{e}_r = \sin\theta \hat{e}_\phi$$

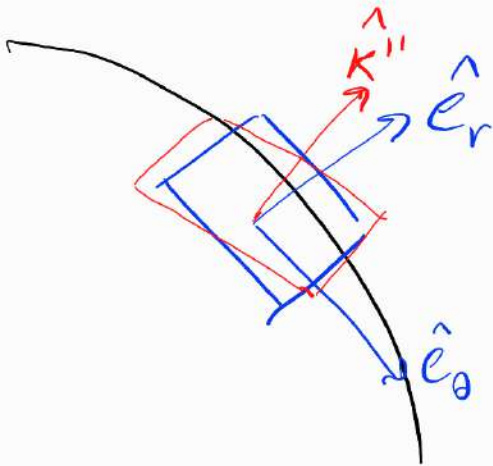
$$\Rightarrow \hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{e}_r) = -\sin\theta (\cos\theta \hat{e}_\theta + \sin\theta \hat{e}_r)$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \left(\omega^2 r \sin^2 \theta - \frac{M_T G}{r^2} \right) \hat{e}_r + \omega^2 r \sin \theta \cos \theta \hat{e}_\theta$$

$\parallel$ $\leftarrow$ $\parallel$
 $0,034 \frac{m}{s^2} \sin^2 \theta$ $9,79 \frac{m}{s^2}$ $0,034 \frac{m}{s^2} \sin \theta \cos \theta$
 $r \approx R_T$

Esto implica que la vertical se desvía en la dirección de $-\hat{e}_\theta$!!

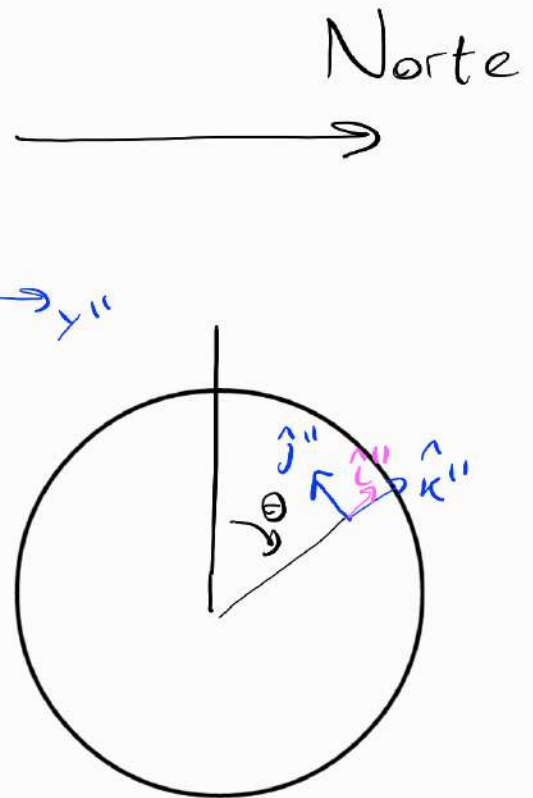
La forma esférica se achata hacia los polos



Para jugar: hallar la forma $r(\theta)$ asumiendo $|\vec{g}| = cte = \text{valor en los polos}$ (numérico) $(\sin \theta = 0)$

Ejemplo 4 - Péndulo de Foucault.

Este sistema / experimento pone de manifiesto el efecto de coriolis. Consiste en un péndulo muy largo realizando pequeñas oscilaciones. además colocamos $\vec{g} = -9,8 \hat{k}''$


$$\alpha = \pi - \theta'' < \pi$$

$$\Rightarrow -\cos \theta'' \approx 1 \approx \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$m\vec{a}' = \vec{T} - mg\hat{k}'' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\text{con } \vec{\omega} = \omega_T \sin \theta \hat{j}'' + \omega_T \cos \theta \hat{k}''$$

$$\vec{T} = T_z \hat{k}'' + T_x \hat{i}'' + T_y \hat{j}''$$

$$\vec{r}'' = \underbrace{l \sin \theta'' \cos \phi''}_{x''} \hat{i}'' + \underbrace{l \sin \theta'' \sin \phi''}_{y''} \hat{j}'' + \underbrace{l(1 - \cos \theta'')}_{z'' \approx 0} \hat{k}''$$

$$\vec{V}^I = \vec{V}^{II} = \dot{x}^{II} \hat{e}^{II} + \dot{y}^{II} \hat{j}^{II}$$

(s' y s'' solamente tienen su origen desplazado)

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega_T (\sin\theta \hat{j}'' + \cos\theta \hat{k}'') \times (\dot{x}'' \hat{i}'' + \dot{y}'' \hat{j}'') \\ = \omega_T [-\dot{x}'' \sin\theta \hat{k}'' + \dot{x}'' \cos\theta \hat{j}'' - \dot{y}'' \cos\theta \hat{i}'']$$

$\Rightarrow$ las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$m \ddot{x}'' = T_x + 2m\omega_T \dot{y}'' \cos\theta$$

$$m \ddot{y}'' = T_y - 2m\omega_T \dot{x}'' \cos\theta$$

$$m \ddot{z}'' = T_z - mg + 2m\omega_T \dot{x}'' \sin\theta$$

En el régimen de pequeñas oscilaciones
 $z'' \approx \text{cte} \Rightarrow T_z \approx mg$ ya que $2m\omega_T \dot{x}'' \sin\theta \ll mg$

$$\begin{cases} T_z = -T \cos\alpha \approx T = mg \cos\phi'' \\ T_x \approx -T \sin\alpha \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{l \sin\alpha}\right)}_{\cos\phi''} = -T \frac{x}{l} \\ T_y \approx -T \frac{y}{l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x}'' &= -\frac{g}{l} x + 2\omega_T \cos\theta \dot{y}'' \\ \ddot{y}'' &= -\frac{g}{l} y - 2\omega_T \cos\theta \dot{x}'' \end{aligned}$$

Definimos $\omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}$ y $\omega_T \cos\theta = \omega_z^2$
 y removemos las ''

$$\Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -2\omega_z \dot{x} \end{aligned}$$

• como resolvemos?
 6