

$$(I) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega_z \dot{y} \quad \text{con } \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \quad \text{y} \quad \omega_z = \omega_T \cos \theta$$

$$(II) \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega_z \dot{x}$$

Vamos a comentar 2 métodos de solución, el primero de ellos consiste en considerar los cambios de variables

$$\eta = x + iy, \quad \nu = x - iy$$

haciendo (I) $\pm i$ (II) obtenemos:

$$\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 2\omega_z (\dot{y} - i\dot{x}) = -2i\omega_z (\dot{x} + i\dot{y}) = -2i\omega_z \dot{\eta}$$

$$\ddot{\nu} + \omega_0^2 \nu = 2\omega_z (\dot{y} + i\dot{x}) = 2i\omega_z (\dot{x} - i\dot{y}) = 2i\omega_z \dot{\nu}$$

Es decir que llegamos a las ecuaciones:

$$\ddot{\eta} + 2i\omega_z \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0 \quad (*)$$

$$\ddot{\nu} - 2i\omega_z \dot{\nu} + \omega_0^2 \nu = 0 \quad (**)$$

Son casi como un oscilador armónico amortiguado con la excepción de que el término que usualmente es disipativo aquí es imaginario puro ($\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x}$).

Cada una de estas ecuaciones es lineal de 2^{do} orden (ojo que es una ecuación en $\mathbb{C}$). Buscamos soluciones de la forma: $Ae^{\lambda t}$ donde $A, \lambda \in \mathbb{C}$ son constantes.

Esto nos lleva, para (*), a:

$$(\lambda^2 + 2i\omega_z \lambda + \omega_0^2) Ae^{\lambda t} = 0$$

como buscamos soluciones no nulas, $A \neq 0$, debe ser:

$$\lambda^2 + 2i\omega_z \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \frac{-2i\omega_z \pm \sqrt{4\omega_z^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

o simplificando $\lambda_{\pm}^{(2)} = -i(\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 - \omega_0^2})$

realizando lo mismo para (**) llegamos a:

$$\lambda_{\pm}^{(1)} = i(\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 - \omega_0^2})$$

Definamos, para simplificar, ω_+ y ω_- como:

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2} + \omega_z \quad \text{y} \quad \omega_- = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2} - \omega_z$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm}^{(x)} = \mp i\omega_{\pm} \quad \text{y} \quad \lambda_{\pm}^{(y)} = \pm i\omega_{\pm}.$$

En resumen, tenemos que para cada ecuación tenemos dos soluciones, y al ser éstas lineales la combinación de soluciones es solución. Pero además, tenemos tantos parámetros libres como condiciones iniciales por lo que podremos hallar una solución a la ecuación que satisface las cond. iniciales.

$$x = \frac{z+y}{2} = \frac{1}{2} (C e^{i\omega_+ t} + A e^{-i\omega_+ t} + B e^{i\omega_- t} + D e^{-i\omega_- t})$$

$$y = \frac{z-y}{2i} = \frac{1}{2i} (-C e^{i\omega_+ t} + A e^{-i\omega_+ t} + B e^{i\omega_- t} - D e^{-i\omega_- t})$$

como debe ser $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} C = A^* = C_0 e^{i\delta_0} \\ B = D^* = B_0 e^{i\varphi_0} \end{cases}$

y por tanto será:

$$x(t) = C_0 \cos(\omega_+ t + \delta_0) + B_0 \cos(\omega_- t + \varphi_0)$$

$$y(t) = -C_0 \sin(\omega_+ t + \delta_0) + B_0 \sin(\omega_- t + \varphi_0)$$

las 4 ctes C_0, B_0, δ_0 y φ_0 las fijamos con las c.i. $x(0), \dot{x}(0), y(0)$ e $\dot{y}(0)$. Para ver el efecto del péndulo de Foucault pongamos, $\varphi_0 = \pi, \delta_0 = 0$ y $B_0 = -C_0 \frac{\omega_+}{\omega_-}$:

(Esto equivale a $x(0) = C_0(1 + \frac{\omega_+}{\omega_-})$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$)

$$\Rightarrow x(t) = C_0 \left(\cos(\omega_+ t) + \frac{\omega_+}{\omega_-} \cos(\omega_- t) \right), \quad y(t) = C_0 \left[-\sin(\omega_+ t) + \frac{\omega_+}{\omega_-} \sin(\omega_- t) \right]$$

Digamos ahora que $\omega_z = \alpha \omega_0$ con $\alpha \ll 1$. Ésta es la situación normal ya que $\omega_z \approx 7,27 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

y $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \sim 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ para un péndulo de 10m!!

$$\Rightarrow \omega_{\pm} = \omega_0 (\sqrt{1 \pm \alpha} \pm \alpha) \approx \omega_0 (1 \pm \alpha) + o(\alpha^2) = \omega_c \pm \frac{\Delta\omega}{2}$$

$\alpha \ll 1$

$$\vee \frac{\omega_+}{\omega_-} \approx \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \approx (1+\alpha)(1+\alpha+o(\alpha^2)) \approx 1+2\alpha+o(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow x(t) = C_0 \left[\cos\left(\left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) + (1+2\alpha)\cos\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \right]$$

oscilación de poca amplitud!
Despreciamos la

$$= 2C_0 \left[\cos(\omega_c t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) + \alpha \cos\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \right] \approx 2C_0 \cos(\omega_c t) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

$\alpha \ll 1$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

$$y(t) = C_0 \left[-\sin\left(\left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) + (1+2\alpha)\sin\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \right]$$

oscilación de poca amplitud
Despreciamos la

$$= -2C_0 \left[\cos(\omega_c t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) - \alpha \sin\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \right] \approx -2C_0 \cos(\omega_c t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

$\alpha \ll 1$

$$\uparrow \quad \sin(a-b) - \sin(a+b) = -2\cos(a)\sin(b)$$

$x(t)$ e $y(t)$ tienen el típico comportamiento de batido donde $\frac{\Delta\omega}{2}$ es la frecuencia de la envolvente.

$\frac{\Delta\omega}{2} = \alpha \omega_0 = \omega_f$ es la frecuencia de precesión del péndulo de Foucault.

El otro método lo veremos luego del siguiente punto.

I.3.4 - Equilibrios y comportamientos cercanos

En la naturaleza, es normal encontrarnos con sistemas disipativos donde la energía del sistema tiende a disminuir. Por supuesto, existen también mecanismos de inyección de energías y esta es la base de los organismos vivos. Sin embargo, una gran cantidad de sistemas solemos encontrarlos cercanos a o posiciones de equilibrios estables ya que éstos fluyen naturalmente hacia allí.

Es decir, rara vez encontraremos una pelota en la punta de un montículo sino más bien en un pozo.

Esto es la razón central por la cual, ahora veremos el oscilador armónico es uno de los sistemas físicos más importantes.

En general, cuando uno va a estudiar el comportamiento de un sistema el primer paso es modelarlo. Esto quiere decir, identificar las variables relevantes que describen su estado y ecuaciones que determinen la evolución de las mismas:

Cierto sistema S descrito por las variables $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ evoluciona según:

$$\dot{\vec{\eta}} = \vec{F}(\vec{\eta}) \quad \begin{cases} \dot{\eta}_1 = F_1(\eta_1, \dots, \eta_n) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n = F_n(\eta_1, \dots, \eta_n) \end{cases}$$

Paso 1:

Resolver esto es, en general, difícil por lo que para estudiar dicho sistema comenzamos por lo más simple:

Hallar los puntos fijos, es decir $\dot{\vec{\eta}} \Big|_{\vec{\eta} = \vec{\eta}^*} = 0$.

Estas son n ecuaciones

$$\left| \begin{array}{l} F_1(\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*) = 0 \\ \vdots \\ F_n(\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*) = 0 \end{array} \right| \rightarrow \text{de donde se hallan los pto's fijos.}$$

Paso 2:

El siguiente paso en nivel de complejidad es estudiar como es el comportamiento cerca de los puntos fijos.

Es decir, miramos el comportamiento de $\delta\vec{\eta} \equiv \vec{\eta} - \vec{\eta}^*$, para ello notamos que:

$$\dot{\delta\vec{\eta}} = \vec{F}(\vec{\eta})$$

Por lo tanto, realizando un desarrollo de Taylor en $\vec{\eta}$ tenemos:

$$\dot{\vec{\eta}} = \vec{F}(\vec{\eta}^* + \delta\vec{\eta}) = \vec{F}(\vec{\eta}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta_j} \bigg|_{\vec{\eta}=\vec{\eta}^*} \delta\eta_j + o(\delta\eta^2)$$

o en componentes es:

$$\dot{\eta}_i = F_i(\eta_1^*, \dots, \eta_n^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j} \bigg|_{\substack{\eta_1=\eta_1^* \\ \vdots \\ \eta_n=\eta_n^*}} \delta\eta_j + o(\delta\eta^2)$$

Ahora bien $F_i(\eta_1^*, \dots, \eta_n^*) = 0 \quad \forall i$ ya que esto es lo que define el pto fijo $\vec{\eta}^*$. Entonces, para perturbaciones $\delta\vec{\eta}$ pequeñas en torno al punto fijo, será:

$$\dot{\delta\vec{\eta}} = \mathcal{M} \cdot \delta\vec{\eta} \quad \text{siendo } \mathcal{M} \text{ la matriz de estabilidad: } \mathcal{M}_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j} \bigg|_{\vec{\eta}=\vec{\eta}^*}$$

→ si $\mathcal{M}$ es diagonalizable con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios y $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vectores propios asociados $\Rightarrow$ la solución a dicha ecuación es:

$$\delta\vec{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i e^{\lambda_i t} \quad \text{siendo los } a_i \in \mathbb{C} \text{ constantes.}$$

El caso Newtoniano

Centremonos en el caso de la segunda ley de la mecánica para un sistema de 1 sola variable:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \dot{x})$$

y sea $(x^*, 0)$ un pto de equilibrio del sistema. Es decir, $F(x^*, 0) = 0$.

Definimos la variable $v \equiv \dot{x}$, de esta forma escribimos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{F(x, v)}{m} \end{pmatrix} \quad \text{misma forma de antes} \quad \frac{d\vec{\eta}}{dt} = \vec{F}(\vec{\eta})$$

y la matriz de estabilidad es $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} \end{pmatrix}$
 $\begin{matrix} x=x^* & x=x^* \\ v=0 & v=0 \end{matrix}$

llamémosle $-k = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=x^* \\ v=0}}$ y $-b = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} \Big|_{\substack{x=x^* \\ v=0}}$. Esto nos dice que

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix}$$

Buscar soluciones de la forma $\delta x = A e^{\lambda t}$, $\delta v = \lambda A e^{\lambda t}$ casi equivale al problema de autovalores $\lambda \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix}$ pero imponiendo una forma específica del vector propio acorde a la definición de v .

$$\Rightarrow \lambda^2 A e^{\lambda t} = \left(-\frac{k}{m} - \frac{b}{m} \lambda\right) A e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

3 casos

$$1 - \frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2 : \Rightarrow \delta x = e^{-\frac{b}{2m}t} \left(A_+ e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t} + A_- e^{-i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t} \right)$$

$$\delta x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A_+ = A_-^* = \frac{A e^{i\delta}}{2} \Rightarrow \delta x = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t + \delta\right)$$

$$2 - \frac{k}{m} < \left(\frac{b}{2m}\right)^2 :$$

$$\Rightarrow \delta x = e^{-\frac{b}{2m}t} \left(A_+ e^{\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}t} + A_- e^{-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}t} \right)$$

$$\delta x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A_+, A_- \in \mathbb{R}$$

$$3 - \frac{k}{m} = \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

En este caso M no es diagonalizable sino que tiene una forma de Jordan.

En este caso $\lambda_+ = \lambda_-$ y sería

$$\delta x = (A_+ + A_-) e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$\delta v = -\frac{b}{2m} (A_+ + A_-) e^{-\frac{b}{2m}t}$$

lo cual no podría satisfacer cualquier condición inicial

En este caso, la solución gral. tiene la forma $\delta x = (A + Bt) e^{-\frac{b}{2m}t}$ lo cual podemos ver que cumple:

$$\underbrace{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 (A+Bt)}_{\delta \ddot{x}} + \underbrace{\frac{2b}{2m} B}_{\frac{b}{m} \delta \dot{x}} - \underbrace{\frac{b^2}{2m^2} (A+Bt) - B \frac{b}{m}}_{\frac{k}{m} \delta x = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 \delta x} e^{-\frac{b}{2m}t} = 0$$

En gral estaremos en el caso 1 o 2.

En los problemas en que nos piden hallar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones, estaremos en el caso 1 y ésta será:

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x^* \\ v=0}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial v} \bigg|_{\substack{x=x^* \\ v=0}} \right)^2}$$

Si hay más variables habrá, en general, más de 1 frecuencia.

Volvamos al péndulo de Foucault con esta tecnología.

$$\begin{cases} v_x \equiv \dot{x} \\ v_y \equiv \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_0^2 x + 2\omega_z v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_0^2 y - 2\omega_z v_x \end{cases}$$

y por lo tanto es:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_z \\ 0 & -\omega_0^2 & -2\omega_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

ya estamos en la formalidad!

Resolvamos buscando soluciones

$$\begin{cases} x = A e^{\lambda t} \\ v_x = \lambda A e^{\lambda t} \\ y = B e^{\lambda t} \\ v_y = B \lambda e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 A e^{\lambda t} = (-\omega_0^2 A + 2\omega_z B \lambda) e^{\lambda t} \\ \lambda^2 B e^{\lambda t} = (-\omega_0^2 B - 2\omega_z A \lambda) e^{\lambda t} \end{cases}$$

dado que queremos soluciones no nulas

no puede ser $A=B=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda^2 + \omega_0^2) A = 2\omega_z \lambda B \\ (\lambda^2 + \omega_0^2) B = -2\omega_z \lambda A \end{cases} \Rightarrow \frac{(\lambda^2 + \omega_0^2)^2}{-2\omega_z \lambda} B = 2\omega_z \lambda B$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + \omega_0^2)^2 + 4\omega_z^2 \lambda^2 = 0 \quad \leftarrow \text{obtenemos esto mismo si hacemos } \det(M - \lambda I) = 0$$

haciendo

$$u \equiv \lambda^2 \Rightarrow u^2 + 2u(\omega_0^2 + 2\omega_z^2) + \omega_0^4 = 0$$

$$\Rightarrow u_{\pm} = -(\omega_0^2 + 2\omega_z^2) \pm \sqrt{(\omega_0^2 + 2\omega_z^2)^2 - \omega_0^4} = -(\omega_0^2 + 2\omega_z^2) \pm 2\omega_z \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2}$$

$$\Rightarrow u_{\pm} = -[\omega_z^2 \mp \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2}]^2 \quad \text{de donde } \lambda_{\pm}(u_{\pm}) = \pm \sqrt{u_{\pm}}$$

$$\text{y } \lambda_{\pm}(u_{\pm}) = \pm i(\omega_z^2 \mp \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2}) \quad \leftarrow \text{mismo escenario que del método 1}$$