Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Examen teórico. (2 horas) 12/07/23.

1. (**25 puntos**) Trabajamos en el espacio $\mathbb{R}^3$.
   a) Dar la definición geométrica del producto escalar (la que involucra el ángulo entre los vectores) y la definición algebraica $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = \cdots$.
   b) Dar la definición geométrica del producto vectorial (la que involucra el ángulo entre los vectores) y la definición algebraica $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \cdots$.
   c) Probar que si u y v son dos vectores con u no nulo, entonces existen dos únicos vectores v_1 y v_2 tales que v_1 es colineal con u, v_2 es ortogonal a u y $v = v_1 + v_2$.
   También se pide hallar $\|v_1\|$ y $\|v_2\|$ en función de u y v.

2. (**25 puntos**)
   a) Definir las operaciones elementales en matrices y definir equivalencia de matrices.
   b) Probar que una matriz cuadrada es invertible si y solo si es producto de matrices elementales.
   c) Probar que dos matrices $A, B \in M_{m\times n}$ son equivalentes si y solo si existen matrices invertibles $U \in M_{m\times m}$ y $V \in M_{n\times n}$ tales que $A = UBV$.

3. (**25 puntos**) Sea V un espacio de dimensión finita.
   a) Definir: conjunto linealmente dependiente (LD), conjunto linealmente independiente (LI), generador y base.
   b) Probar que si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es un conjunto LI y $v_{n+1} \in V$ no es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$ entonces $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\} \subset V$ es un conjunto LI
   c) Sea A un subconjunto de V que tiene la misma cantidad de elementos que la dimensión de V. Probar que si A es LI, entonces A es una base de V.

4. (**25 puntos**) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
   a) Definir $\operatorname{Ker}(T)$ (el núcleo de T) y probar que $\operatorname{Ker}(T)$ es un subespacio de V.
   b) Probar que T es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$.
   c) Dar un ejemplo de una transformación lineal que sea inyectiva y de una que no lo sea, justificando la respuesta (evitar los casos de la identidad o la transformación lineal nula).

Nota. En las demostraciones se debe justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."