Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Examen teórico. (2 horas) 28/07/23.

1. (**25 puntos**)

   a) Dar la definición geométrica del producto escalar (la que involucra el ángulo entre los vectores) y la definición algebraica $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = \cdots$.

   b) Deducir la definición algebraica del producto escalar a partir de la definición geométrica.

   c) Dar la ecuación del plano que pasa por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y es ortogonal a un vector no nulo $n = (a, b, c)$, justificando la fórmula.

2. (**25 puntos**)

   a) Definir el determinante de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n$.

   b) Probar que el determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los elementos de la diagonal principal (hacer la prueba en solo uno de los dos casos).

   c) Probar que si $A \in M_n$, entonces $\det\left(A^t\right) = \det(A)$.

3. (**25 puntos**) Sea V un espacio de dimensión finita.

   a) Definir conjunto linealmente dependiente (LD), conjunto linealmente independiente (LI), generador y base.

   b) Probar que si $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ es un generador de V y v_{n+1} es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un generador de V.

   c) Sea A un subconjunto de V que tiene la misma cantidad de elementos que la dimensión de V. Probar que si A es un generador de V, entonces A es una base de V.

4. (**25 puntos**)

   a) Probar que si una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva y A es un subconjunto LI de V, entonces $T(A)$ es un subconjunto LI de W.

   b) Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : V \to W$ (T distinta de la función nula) y un conjunto $A \subset V$ tales que A es LI pero $T(A)$ no es LI.

   c) Sean $S : U \to V$ y $T : V \to W$ dos transformaciones lineales. Probar que si T es inyectiva, entonces $\dim \operatorname{Im}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im}(S)$.

Nota. En las demostraciones se debe justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."