

Examen teórico. (2 horas) 02/02/24.

1. (25 puntos)

- a) Dar la definición geométrica del producto escalar (la que involucra el ángulo entre los vectores) y la definición algebraica $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = \dots$.
- b) Dar la ecuación del plano que pasa por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y es ortogonal a un vector no nulo $n = (a, b, c)$, justificando la fórmula.
- c) Deducir la fórmula de la distancia de un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ a un plano Π de ecuación $ax + by + cz = d$.

2. (25 puntos)

- a) Definir el determinante de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n$.
- b) Probar que el determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los elementos de la diagonal principal (hacer la prueba en solo uno de los dos casos).
- c) Indicar si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa, justificando la respuesta.
 - 1) Si una matriz tiene una fila que es un múltiplo de otra, entonces su determinante vale cero.
 - 2) Si se realizan operaciones elementales en las filas de una matriz, entonces su determinante no varía.
 - 3) Vale $\det(-A) = -\det(A)$, para toda matriz $A \in M_n$.

3. (25 puntos) Sea V un espacio de dimensión finita.

- a) Definir conjunto linealmente dependiente (LD), conjunto linealmente independiente (LI), generador y base.
- b) Probar que si $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ es un generador de V y v_{n+1} es combinación lineal de v_1, \dots, v_n , entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un generador de V .
- c) Sea A un subconjunto de V que tiene la misma cantidad de elementos que la dimensión de V . Probar que si A es un generador de V , entonces A es una base de V .

4. (25 puntos) Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- a) Definir $\text{Ker}(T)$, el núcleo de T .
- b) Probar que T es inyectiva si y solo si $\text{Ker}(T) = \{0\}$.
- c) Dar un ejemplo de una transformación lineal que sea inyectiva y de una que no lo sea, justificando la respuesta (evitar los casos de la identidad o la transformación lineal nula).

Nota. En las demostraciones se debe justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo “usando el teorema que dice ..., entonces ...”