Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Examen (4 horas) 02/02/24.

1. (**30 puntos**) Se consideran los puntos

$$P = (1,1,1), \quad Q = (0,1,1), \quad R = (1,1,0), \quad S = (1,0,1).$$

   a) Hallar la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por Q, R, S.
   b) Sea r la recta de ecuación cartesiana $x = y = z$. Probar que r pasa por P y es ortogonal a Π.
   c) Se considera la pirámide de vértices P, Q, R, S.
      1) Calcular la medida h de la altura de la pirámide que pasa por el vértice P.
      2) Calcular el volumen de la pirámide[1].

2. (**30 puntos**) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

   a) Determinar los valores de λ que hacen que A no sea invertible.
   b) Para $\lambda = 0$ hallar una matriz X que verifique $2AX + AB - 2A^2 = 0$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   c) Sean F_1, F_2, F_3, F_4 las filas de la matriz A contadas desde arriba. Para cada uno de los valores hallados en la parte $2a$, hallar una combinación lineal de F_1, F_2, F_3, F_4 que dé el vector nulo.

3. (**40 puntos**)
   a) Probar que $\mathcal{B} = \left\{1 + x + x^2,\ 1 + 2x + 2x^2,\ 1 + x + 2x^2\right\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b) Sea $\mathcal{C} = \left\{1,\ x,\ x^2\right\}$. Hallar las matrices de cambio de base ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}$.
   c) Hallar $T\left(a + bx + cx^2\right) = \cdots$, siendo $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal que verifica

$$T\left(1 + x + x^2\right) = (1,1,1,0), \quad T\left(1 + 2x + 2x^2\right) = (1,1,1,0), \quad T\left(1 + x + 2x^2\right) = (2,0,1,-1).$$

   d) Hallar bases de la imagen y del núcleo de T.
   e) Determinar si T es inyectiva o sobreyectiva.

[1] El volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}ah$, siendo a el área de la base y h la altura

Solución.

1.
   a) La ecuación cartesiana de Π es $x+y+z=2$.
   b) Es claro que las coordenadas de P verifican la ecuación de r. Además la ecuación vectorial de r es $(x,y,z)=t(1,1,1)$, $t\in\mathbb{R}$, y $(1,1,1)$ es un vector normal a Π.
   c) 1) La intersección de r con Π es $T=\frac{2}{3}(1,1,1)$. Luego
$$h=\|P-T\|=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
      2) El volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}ah$, siendo a el área de la base y h la altura.
$$a=\frac{1}{2}\|(R-Q)\times(S-Q)\|=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad \text{volumen}=\frac{1}{3}ah=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}.$$

2. Se considera la matriz
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&\lambda+2&2&2\\2&2&4&\lambda+1\\1&1&1&\lambda-1\end{pmatrix}.$$
   a) Es $\det(A)=2(\lambda+1)(\lambda-2)$. Luego A no es invertible si y solo si $\lambda=-1$ o $\lambda=2$.
   b) Para $\lambda=0$ la matriz A es invertible, luego
$$2AX+AB-2A^2=0\quad\Leftrightarrow\quad 2X+B-2A=0\quad\Leftrightarrow\quad X=A-\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\1&1&3&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$
   c) Para $\lambda=-1$ es
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&2\\2&2&4&0\\1&1&1&-2\end{pmatrix}.$$
   Operando se obtiene $F_1-\frac{3}{2}F_2+\frac{3}{4}F_3-F_4=0$.
   Para $\lambda=2$ es
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&4&2\\2&2&4&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$
   En este caso es claro que vale $F_1+0F_2+0F_3-F_4=0$.

3.
   a) Cuentas (es fácil de probar que es LI, y su cardinal es la dimensión del espacio).
   b) Sea $\mathcal{C}=\{1,\,x,\,x^2\}$. Hallar las matrices de cambio de base ${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$.
$${}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}=\left({}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

c) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a-b+c,\ a+b-c,\ a,\ b-c)$. Hay varias formas de obtenerlo, por ejemplo a partir de ${}_{\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$, siendo $\mathcal{D}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

d) El conjunto $\left\{x+x^2\right\}$ es una base del núcleo de T. Luego $\dim \mathrm{Im}(T)=3-1=2$. Usando la parte anterior se deduce que $\{(1,1,1,0),\ (2,0,1,-1)\}$ es una base de la imagen de T.

e) Usando la parte anterior se deduce que T no es inyectiva ni sobreyectiva.