Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Examen teórico. (2 horas) 02/02/24.

1. (**20 puntos**)

   a) Dar la definición geométrica y la definición algebraica del producto vectorial de dos vectores.

   b) Sabemos que si u y v son vectores con u no nulo, entonces existen únicos vectores v_1 y v_2 tales que v_1 es colineal con u, v_2 es ortogonal a u y $v = v_1 + v_2$. Probar

   $$\|v_1\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|}, \qquad \|v_2\| = \frac{\|u \times v\|}{\|u\|}.$$

   c) Probar que el área del paralelogramo generado por dos vectores (no colineales), es la norma de su producto vectorial.

2. (**30 puntos**)

   a) Definir los tres tipos de operaciones elementales en matrices y las matrices elementales correspondientes.

   b) Explicar cómo se obtienen las operaciones elementales operando con matrices elementales (hacerlo para las operaciones de un solo tipo).

   c) Hallar los determinantes de las matrices elementales (discutiendo segun su tipo).

   d) Probar que si $A, B \in M_n$ y A es una matriz elemental, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3. (**30 puntos**) Sea V un espacio de dimensión finita. Consideramos W_1 y W_2 dos subespacios de V.

   a) Definir $W_1 + W_2$ y probar que $W_1 + W_2$ es un subespacio.

   b) Probar que si G_1 un generador de W_1 y G_2 un generador de W_2, entonces $G := G_1 \cup G_2$ es un generador de $W_1 + W_2$.

   c) Probar $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

4. (**20 puntos**) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios de dimensión finita. Indicar si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa, justificando la respuesta.

   a) Si existe un generador A de V tal que $T(A)$ es un generador de W, entonces T es sobreyectiva.

   b) Si existe $A \subset V$ que es LI tal que $T(A)$ es un subconjunto LI de W, entonces T es inyectiva.

Nota. En las demostraciones se debe justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."