Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Examen (4 horas) 22/02/2024.

1. (**20 puntos**) En cada caso, hallar la ecuación del plano Π que satisface las condiciones especificadas.

   a) Pasa por el punto $(2, -1, 1)$, es perpendicular al plano $2x + 3y - z + 5 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z. \end{cases}$

   b) Pasa por el punto $(1, 1, 1)$, es paralelo al eje Oy y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje Ox (hay dos posibilidades, elegir una).

2. (**20 puntos**) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

   a) Mostrar que B se puede obtener realizando operaciones elementales en las filas de A.

   b) Encontrar una matriz M tal que $B = MA$.

   c) Indicar si A es equivalente a alguna de las siguientes matrices, justificando la respuesta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (**30 puntos**) Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se consideran[1]

$$W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f \text{ es par}\} \quad y \quad W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f \text{ es impar}\}.$$

   a) Probar que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (las pruebas son análogas, hacerla en solo uno de los casos).

   b) Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Definimos $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $g(x) = f(x) + f(-x)$ y $h(x) = f(x) - f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Investigar si g y h están en W_1 o en W_2.

   c) Probar $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

4. (**30 puntos**)

   a) Probar que $\mathcal{B} = \{1,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2,\ 1 + x + x^2 + x^3\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$

   De ahora en adelante $\mathcal{B}$ es la base anterior y $\mathcal{C} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ es la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

   b) Hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}$, siendo $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal definida por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + d + (a + b + c)x + (a + b)x^2 + ax^3, \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

   c) Se considera la transformación lineal $S : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que ${}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Hallar una base del núcleo de S y una de la imagen de S.

[1] Recordar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *par* o *impar* si verifica $f(-x) = f(x)$ o $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Solución:

1. Sea n un vector normal a Π.

   a) La ecuación vectorial de la recta es $(x, y, z) = (3, 0, 0) + t(2, 1, 1)$. El vector normal n tiene que ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y a $(2, 3 - 1)$ (el vector normal a $2x + 3y - z + 5 = 0$), luego n es paralelo a $(2, 3 - 1) \times (2, 1, 1) = 4(1, -1, -1)$. Entonces $\Pi: \; x - y - z = 2$.

   b) La segunda condición implica que $n = (a, b, c)$ tiene que ser perpendicular a $(0, 1, 0)$, luego $b = 0$ y $n = (a, 0, c)$. Imponiendo que el ángulo entre n y $(1, 0, 0)$ sea $\pi/6$ obtenemos

   $$\frac{(a, 0, c) \cdot (1, 0, 0)}{\|(a, 0, c)\| \, \|(1, 0, 0)\|} = \cos(\pi/6) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{3}\, c.$$

   Tomando $n = \left(\sqrt{3}, 0, 1\right)$ obtenemos $\Pi: \; \sqrt{3}\, x + z = \sqrt{3} + 1$.

2. *a*) La matriz B se puede obtiene de A sumándole a la segunda fila la primera multiplicada por -2 y a la tercera la primera multiplicada por -3.

   b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   c) Las matrices A y B son quivalentes y B tiene rango 2; luego B es equivalente a la segunda matriz de la lista y por lo tanto A también lo es.

3. *a*) Cuentas.

   b) $g \in W_1$ y $h \in W_2$.

   c) Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces escribiendo

   $$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

   obtenemos $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h$, con $g \in W_1$ y $h \in W_2$. Esto implica $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = W_1 + W_2$.
   Si $f \in W_1 \cap W_2$, entonces

   $$f(-x) = f(x) \text{ y } f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -f(x), \; \forall x \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0, \; \forall x.$$

   Luego $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ y por lo tanto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

4. *a*) Cuentas (es fácil de probar que es LI, y su cardinal es la dimensión del espacio).

   b)

   $$_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   c) Vale $\text{rango}(S) = \text{rango}\left({}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{C}}\right) = 3$; luego $\dim \operatorname{Im}(S) = 3$ y $\dim \operatorname{Ker}(S) = 4 - 3 = 1$.
   De acuerdo a cómo es ${}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{C}}$ sabemos que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Ker}(S)$, luego $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(S)$.
   Por lo mismo deducimos que $\mathcal{B} = \left\{1, \, 1 + x, \, 1 + x + x^2\right\}$ es una base de $\operatorname{Im}(S)$.