Prueba 1, 25 puntos, 21/04.

1. (**9 puntos**)

   a) Probar $\|v\|^2 = v \cdot v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

   b) Probar $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$.

   c) Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Hallar $\|u+v\|$ sabiendo $\|u\| = 2$, $\|v\| = 3$ y que el coseno del ángulo formado por u y v vale $\frac{1}{4}$.

2. (**9 puntos**)

   a) Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y es paralelo a los vectores $(2, -1, 1)$ y $(1, 1, 1)$.

   b) Hallar la intersección del plano $x + y + z = 3$ con la recta que pasa por el punto $(4, 4, 7)$ y es paralela al vector $(1, 2, 3)$.

   c) Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los planos de ecuaciones $x + y + z = 1$, $x - z = 3$.

3. (**7 puntos**)

   a) Expresar los siguientes numeros complejos en la forma $a + bi$:

$$\frac{2}{1+i}, \qquad (1+i)^2, \qquad e^{\frac{\pi}{2}i}, \qquad \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}.$$

   b) Para cada uno de los siguientes complejos z, hallar $r > 0$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$ tales que $z = re^{\varphi i}$.

$$z = -2i, \qquad z = 1+i, \qquad z = \frac{1}{1+i}.$$

Solución.

1. *a)* Usando $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ y $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, obtenemos $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \|v\|^2$.

   b) $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$.

   c)

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos(\theta) = 2 \times 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$
$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v = 4 + 9 + 2 \times \frac{3}{2} = 16 \quad \Rightarrow \quad \|u + v\| = 4.$$

2. *a)*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 3z = 5.$$

   b) La ecuación vectorial de la recta es $(x, y, z) = (4, 4, 7) + t(1, 2, 3)$. Luego el punto P de intersección se obtiene mediante

$$(4 + t) + (4 + 2t) + (7 + 3t) = 3 \quad \Rightarrow \quad t = -2 \quad \Rightarrow \quad P = (2, 0, 1).$$

   c) Los vectores normales a los planos $x + y + z = 1$, $x - z = 3$, son $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, -1)$. Luego $n = u \times v = (-1, 2 - 1)$ es un vector paralelo a su intersección y por lo tanto la recta es $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(-1, 2 - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. *a)* $\frac{2}{1+i} = 1 - i, \qquad (1 + i)^2 = 2i, \qquad e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}{1-e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i.$

   b) $-2i = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}, \qquad 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \qquad \frac{1}{1+i} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7\pi}{4}i}.$