**Prueba 2**, 25 puntos, 19/05.

1. (**6 puntos**)
   Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 4 & 5 & 30 \\ 7 & 8 & 45 \end{pmatrix}.$$

   *a*) Encontrar operaciones elementales que lleven $A$ en $B$ y $A$ en $C$.

   *b*) Encontrar matrices elementales $E_1$ y $E_2$ tales que $B = E_1 A$ y $C = AE_2$.

   *c*) Encontrar matrices elementales $F_1$ y $F_2$ tales que $B = F_1 C F_2$.

2. (**6 puntos**)
   Se consideran las siguientes matrices

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Determinar si son equivalentes entre sí.

3. (**6 puntos**)
   Sabiendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

4. (**7 puntos**)
   Se consideran las siguientes matrices

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

   *a*) Investigar si son invertibles.

   *b*) En caso de ser invertible, hallar la inversa (aplicando el algoritmo de las notas).

**Nota:** se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la resolución de los ejercicios.

**Solución.**

1. *a*) La matriz $B$ se obtiene intercambiando las filas 1 y 2 de $A$. La matriz $C$ se obtiene multiplicando por 5 la columna 3 de $A$.

   *b*) Las matrices elementales $E_1$ y $E_2$ se obtienen aplicando las operaciones elementales anteriores a la matriz identidad.
$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

   *c*) Sabemos $B = E_1 A$ y $C = AE_2$. De $C = AE_2$, se obtiene $A = CE_2^{-1}$ y por lo tanto $B = E_1 A = E_1 C E_2^{-1}$. Luego
$$F_1 = E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

2. Es $\det(X) = 1$, $\det(Y) = -2$ y $\det(Z) = 0$; luego $X$ e $Y$ son invertibles y $Z$ no es invertible. Como $X$ e $Y$ son invertibles, entonces $X \sim I_2$ y $Y \sim I_2$, por lo tanto es $X \sim Y$. Por otro lado, como la equivalencia de matrices preserva la invertibilidad, obtenemos $X \not\sim Z$ e $Y \not\sim Z$.

   Alternativamente, sin usar determinantes, es fácil de probar que valen $X \sim I_2$, $Y \sim I_2$ y $Z \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Luego $X \sim Y$. Además $X$ e $Y$ son invertibles y $Z$ no es invertible, por lo cual $X \not\sim Z$ e $Y \not\sim Z$.

3. $$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2^3 = 8, \quad \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3.$$

   En el primero, se saca 2 de factor común en cada fila (o en cada columna). En el segundo hay que hacer dos intercambios de columnas: $C1 \leftrightarrow C2$ y $C2 \leftrightarrow C3$, luego hay dos cambios de signo por lo que el determinante no varía. En el tercero, hay que multiplicar la segunda fila por 3 y luego sumarle la primera multiplicada por 2 (lo cual no afecta al determinante).

4. *a*) Es
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

   Luego $P$ no es invertible y $Q$ es invertible.

   *b*)
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$