Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Prueba 3, 25 puntos, 09/06.

1. (**12 puntos**)
   En los casos siguientes se pide:

   - Determinar si el subconjunto A del espacio V es LI o LD.
   - Cuando el conjunto A sea LD, encontrar $A_0 \subset A$ que sea LI y tal que los restantes vectores de A sean combinaciones lineales de A_0.

   a) $A = \{(1,1,1),\, (2,4,5),\, (3,6,7)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
   b) $A = \{-1 + 2x + 3x^2,\, 3 - x + 2x^2,\, 11 - 7x\}$, $V = \mathbb{R}_2[x]$.
   c) $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

2. (**13 puntos**)
   Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} W_1 &= [(-1,12,4,7),\, (1,5,1,3)], \\ W_2 &= [(0,18,5,11),\, (0,1,0,1)], \\ W_3 &= \{(x,y,z,t) :\ y = 8x + 5z,\ t = 5x + 2z\}. \end{aligned}$$

   a) Hallar una base de $W_1 \cap W_2$.
   b) Determinar la dimensión de $W_1 + W_2$.
   c) Hallar una base de $W_1 + W_2$.
   d) Investigar si vale $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus W_3$.

Nota: se debe poder seguir el razonamiento empleado para la resolución de los ejercicios, justificando las afirmaciones e incluyendo los cálculos.

Solución.

1. *a*) Como $A \subset \mathbb{R}^3$ tiene 3 vectores, para saber si es LI o D alcanza con calcular el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores de A. En este caso vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

luego $A = \{(1,1,1),\ (2,4,5),\ (3,6,7)\}$ es LI.

b) Para ver si $A = \left\{-1+2x+3x^2,\ 3-x+2x^2,\ 11-7x\right\}$ es LI tenemos que resolver

$$a(-1+2x+3x^2)+b(3-x+2x^2)+c(11-7x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -a+3b+11c+(2a-b-7c)x+(3a+2b)x^2 = 0.$$

Esto último equivale a

$$\begin{cases} -a+3b+11c &= 0 \\ 2a-b-7c &= 0 \\ 3a+2b &= 0 \end{cases}.$$

Este es un sistema compatible indeterminado (con un grado de libertad), lo cual implica que A es LD. Las soluciones se pueden expresar como $a = 2c,\ b = -3c$, con c libre. Tomando $c = 1$ obtenemos $a = 2,\ b = -3$, luego es

$$2(-1+2x+3x^2)-3(3-x+2x^2)+(11-7x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 11-7x = -2(-1+2x+3x^2)+3(3-x+2x^2).$$

Entonces podemos tomar $A_0 = \left\{-1+2x+3x^2,\ 3-x+2x^2\right\}$. Notar que A_0 es LI, dado que está formado por dos vectores y ninguno es múltiplo del otro (también es fácil de probarlo aplicando la definición de LI).

c) Razonando como en el caso anterior, obtenemos

$$a\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5a+4b+3c+d &= 0 \\ 3a+3b+3c+3d &= 0 \\ 7a+6b+5c+3d &= 0 \\ 5a+6b+7c+9d &= 0 \end{cases}$$

Este es un sistema compatible indeterminado (con dos grados de libertad) lo cual implica que A es LD. Además las soluciones se pueden expresar como $a = c+3d,\ b = -2c-4d,\ c, d$ libres. Tomando $c = 0$ y $d = 1$, obtenemos $a = 3$ y $b = -4$. Luego

$$3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, tomando $c = 1$ y $d = 0$, obtenemos $a = 1$ y $b = -2$. Luego

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Entonces podemos tomar $A_0 = \left\{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\right\}$, que es LI por la misma razón que en el caso anterior.

2. Tenemos $W_1 = [(-1, 12, 4, 7),\ (1, 5, 1, 3)]$ y $W_2 = [(0, 18, 5, 11),\ (0, 1, 0, 1)]$.

   a) Observar que es

   $$\begin{aligned} W_1 &= \{a(-1, 12, 4, 7) + b(1, 5, 1, 3) :\ a, b \in \mathbb{R}\}, \\ W_2 &= \{c(0, 18, 5, 11) + d(0, 1, 0, 1) :\ c, d \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Luego para hallar $W_1 \cap W_2$ tenemos que resolver

   $$a(-1, 12, 4, 7) + b(1, 5, 1, 3) = c(0, 18, 5, 11) + d(0, 1, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -a + b &=& 0 \\ 12a + 5b &=& 18c + d \\ 4a + b &=& 5c \\ 7a + 3b &=& 11c + d \end{array} \right.$$

   Resolviendo el sistema obtenemos $a = b = c$, $d = -a$. Entonces los vectores de $W_1 \cap W_2$ tienen la forma

   $$a(-1, 12, 4, 7) + a(1, 5, 1, 3) = a(0, 17, 5, 10),\ \ a \in \mathbb{R}.$$

   Entonces

   $$W_1 \cap W_2 = \{a(0, 17, 5, 10) :\ a \in \mathbb{R}\} = [(0, 17, 5, 10)].$$

   Luego una base de $W_1 \cap W_2$ es $\{(0, 17, 5, 10)\}$.

   b) Notar que $B_1 = \{(-1, 12, 4, 7),\ (1, 5, 1, 3)\}$ y $B_2 = \{(0, 18, 5, 11),\ (0, 1, 0, 1)\}$ son bases respectivas de W_1 y W_2 (son generadores y es claro que son LI). Luego es $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ y por la parte anterior es $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Entonces

   $$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

   c) Como B_1 y B_2 son bases de W_1 y W_2, entonces el conjunto

   $$C = B_1 \cup B_2 = \{(-1, 12, 4, 7),\ (1, 5, 1, 3),\ (0, 18, 5, 11),\ (0, 1, 0, 1)\}$$

   es un generador de $W_1 + W_2$. Sabemos que C no es base (porque $\dim(W_1 + W_2) = 3$ y C tiene 4 elementos). Así que C tiene que tener un vector que es combinación lineal de los restantes. Estudiando su dependencia lineal obtenemos

   $$(-1, 12, 4, 7) + (1, 5, 1, 3) - (0, 18, 5, 11) + (0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0),$$

   luego $(0, 18, 5, 11) = (-1, 12, 4, 7) + (1, 5, 1, 3) + (0, 1, 0, 1)$. Entonces

   $$B = \{(-1, 12, 4, 7),\ (1, 5, 1, 3),\ (0, 1, 0, 1)\}$$

   también es un generador de $W_1 + W_2$. Como $\dim(W_1 + W_2) = 3 = \#B$, concluimos que B es una base de $W_1 + W_2$.

   d) Tenemos $W_2 = [(0, 18, 5, 11),\ (0, 1, 0, 1)]$ y $W_3 = \{(x, y, z, t) :\ y = 8x + 5z,\ t = 5x + 2z\}$. Notar

   $$W_2 = \{a(0, 18, 5, 11) + b(0, 1, 0, 1) :\ a, b \in \mathbb{R}\} = \{(0,\ 18a + b,\ 5a,\ 11a + b) :\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   Imponiendo que un vector $(0,\ 18a + b,\ 5a,\ 11a + b)$ de W_2 esté en W_3 obtenemos[1]

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 18a + b &=& 8(0) + 5(5a) \\ 11a + b &=& 5(0) + 2(5a) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 18a + b &=& 25a \\ 11a + b &=& 10a \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -7a + b &=& 0 \\ a + b &=& 0 \end{array} \right.$$

   La única solución del sistema es $a = b = 0$, lo cual implica $W_2 \cap W_3 = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Como además es $\dim W_2 + \dim W_3 = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, concluimos $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus W_3$.

[1] Otra manera de hallar $W_2 \cap W_3$ consiste en encontrar una base de W_3 y razonar como en el ítem 2*a*.