Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Prueba 4, examen. (2 horas) 12/07/23.

1. (**10 puntos**)
   Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 10 & 7 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$
   y la transformación lineal $T = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.
   a) Hallar el rango de A.
   b) Determinar si T es inyectiva o sobreyectiva.
   c) Hallar una base del núcleo de T y una base de la imagen de T.

2. (**15 puntos**)
   a) Probar que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ tal que
$$T(1) = (1,1,1,1),\ T(2+x) = (2,3,3,3),\ T\left(3+2x+x^2\right) = (3,5,6,6),\ T\left(x+x^3\right) = (0,1,1,2).$$
   b) Hallar la matriz asociada a T en las bases
$$B = \left\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\right\}, \quad C = \{(1,0,0,0),\, (0,1,0,0),\, (0,0,1,0),\, (0,0,0,1)\}.$$
   c) Hallar $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) = \cdots$.
   d) Probar que T es un isomorfismo.
   e) Hallar $T^{-1}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \cdots$.

Solución.

1. *a*) Haciendo operaciones elementales en las columnas obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 10 & 7 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 6 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.

   Luego $\operatorname{rango}(A) = 2$ (rango por columnas).

   b)

$$\begin{aligned} &\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Im}(L_A) = \operatorname{rango}(A) = 2 < 4 = \dim \mathbb{R}^4 \;\Rightarrow\; T \text{ no es sobreyectiva.} \\ &\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \;\Rightarrow\; \dim \operatorname{Ker}(T) = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker}(T) \neq \{0\} \\ &\Rightarrow\; T \text{ no es inyectiva.} \end{aligned}$$

   c) Las columnas de A son un generador de la imagen de L_A, como $\dim \operatorname{Im}(L_A) = 2$ y cualquier par de columnas de A es LI (no son colineales), concluimos que $\{(1,4,4,6),\, (3,6,10,8)\}$ es una base de la imagen de T. Una base del núcleo de T es $\{(1,1,-2)\}$.

2. *a*) Como toda transformación lineal queda determinada por lo que vale en una base, alcanza con probar que $B_0 = \left\{1,\, 2+x,\, 3+2x+x^2,\, x+x^3\right\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$ y para eso alcanza con probar que B_0 es LI, lo cual es fácil.

   b)

$$\begin{aligned} T(x) &= T(2+x) - 2T(1) = (0,1,1,1), \\ T\left(x^2\right) &= T\left(3+2x+x^2\right) - 3T(1) - 2T(x) = (0,0,1,1) \\ T\left(x^3\right) &= T\left(x+x^3\right) - T(x) = (0,0,0,1). \end{aligned}$$

   Luego

$${}_C[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Usando la fórmula para ${}_C[T]_B$ obtenemos

$$T\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = (a,\, a+b,\, a+b+c,\, a+b+c+d).$$

   d) Es $\det\left({}_C[T]_B\right) = 1 \neq 0$; luego ${}_C[T]_B$ es invertible y por lo tanto T es un isomorfismo.

   e)

$$T\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = (\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta) \quad\Leftrightarrow\quad (a,\, a+b,\, a+b+c,\, a+b+c+d) = (\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \alpha \\ a+b & = & \beta \\ a+b+c & = & \gamma \\ a+b+c+d & = & \delta \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \alpha \\ b & = & \beta - \alpha \\ c & = & \gamma - \beta \\ d & = & \delta - \gamma \end{array} \right.$$

   Luego $T^{-1}(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta) = \alpha + (\beta - \alpha)x + (\gamma - \beta)x^2 + (\delta - \gamma)x^3$.