Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal I, curso 2023.**

Prueba 4, examen. (2 horas) 28/07/23.

1. (**12 puntos**)

   a) Probar que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que

   $$T(1,0,1) = (1,1,1), \quad T(0,1,1) = (2,-1,1), \quad T(1,0,2) = (0,0,0), \quad T(2,1,4) = (3,0,2).$$

   b) Hallar explícitamente $T(x,y,z) = \cdots$.

   c) Determinar si T es sobreyectiva.

   d) Hallar una base de $\operatorname{Ker}(T)$.

2. (**13 puntos**)
   Se consideran la base C de $\mathbb{R}_3[x]$ y las bases B_1 y B_2 de $\mathbb{R}^3$, definidas por

   $$C = \left\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\right\}, \quad B_1 = \{(1,0,0),\, (0,1,0),\, (0,0,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,-1),\, (-1,1,0),\, (0,-1,2)\}.$$

   Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal tal que

   $$_C[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 9 \\ -4 & -4 & 15 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Se pide:

   a) Hallar $_{B_1}[\mathrm{Id}]_{B_2}$, $_{B_2}[\mathrm{Id}]_{B_1}$ y $_C[T]_{B_1}$.

   b) Hallar $T(a,b,c) = \cdots$.

   c) Hallar las dimensiones del núcleo y de la imagen de T.

   d) Hallar una base de $\mathrm{Im}(T)$.

Solución.

1. *a*) El conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,0,2)\}$ es LI y por lo tanto es una base de $\mathbb{R}^3$. Operando obtenemos

$$(x,y,z) = (2x+y-z)(1,0,1) + y(0,1,1) + (-x-y+z)(1,0,2), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si existe T, entonces está definida por

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (2x+y-z)T(1,0,1) + yT(0,1,1) + (-x-y+z)T(1,0,2) \\ &= (2x+y-z)(1,1,1) + y(2,-1,1) + (-x-y+z)(0,0,0) \\ &= (2x+3y-z,\, 2x-z,\, 2x+2y-z). \end{aligned} \tag{1}$$

Con T definida de esta forma obtenemos $T(2,1,4) = (3,0,2)$ que es la condición retante. Luego existe una única transformación lineal T que verifica lo pedido y está definida por la fórmula (1).

b) Tenemos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x+3y-x,\, 2x-z,\, 2x+2y-z)$. Luego $T = L_A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Claramente es rango$(A) = 2$ (rango por columnas), luego $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$. Como es $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, concluimos que T no es sobreyectiva.

d) Sabemos $T(1,0,2) = (0,0,0)$ y $\dim \operatorname{Ker}(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im}(T) = 3-2 = 1$, luego $\{(1,0,2)\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(T)$.

2. *a*)

$$_{B_1}[\mathrm{Id}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad _{B_2}[\mathrm{Id}]_{B_1} = \left(_{B_1}[\mathrm{Id}]_{B_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$_C[T]_{B_1} = {}_C[T]_{B_2} \times {}_{B_2}[\mathrm{Id}]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $T(a,b,c) = -a+2b+c + (2a-b+4c)x + (3a-b+7c)x^2 + (a-b+c)x^3$.

c) El rango de $_C[T]_{B_1}$ es 2 (si C_1, C_2, C_3 son sus columnas, entonces $C_3 = 3C_1 + 2C_2$ y $\{C_1, C_2\}$ es LI). Luego $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ y por lo tanto $\dim \operatorname{Ker}(T) = \dim \mathbb{R}_3[x] - \dim \operatorname{Im}(T) = 4-2 = 2$.

d) Por lo comentado en la parte anterior, sabemos que las dos primeras columnas de $_C[T]_{B_1}$ nos dan las coordenadas en la base C de una base de $\operatorname{Im}(T)$. Luego

$$\left\{-1+2x+3x+x^3,\, 2-x-x^2-x^3\right\}$$

es una base de $\operatorname{Im}(T)$.