Práctico 5

Matrices

En este repartido las matrices son *reales*, es decir, sus coeficientes son números reales.

1. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular: $4A + B,\ 2A - 3B,\ AB,\ CA,\ CA^2B$.

   b) Hallar $X \in M_3$ tal que $5X + 3B = 2(A + 2X)$.

2. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$
   Verificar:
$$AB = BA = 0, \quad AC = A, \quad CA = C, \quad C^2 = C, \quad A^2 = A.$$
   Notar que en el producto en $\mathbb{R}$ no suelen ocurrir este tipo de situaciones.

3. Encontrar ejemplos de matrices 2×2 tales que:

   a) $A^2 = -I$;

   b) $B^2 = 0,\ B \neq 0$;

   c) $CD = -DC$, siendo $CD \neq 0$;

4. Un laboratorio fabrica tres productos A, B y C, cada uno de los cuales requiere ciertas cantidades de tres tipos de materia prima X, Y y Z, y de mano de obra. Los requerimientos por unidad de cada producto están resumidos en la siguiente matriz
$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Las necesidades de materias primas se dan en kg por unidad y las de mano de obra en horas (de trabajo) por unidad. Por ejemplo, la primera fila de R indica que para producir una unidad de producto A, se necesita 2 kg de materia prima X, 4 kg de Y, 5 kg Z y 5 horas de mano de obra.

   a) Supongamos que queremos producir ciertas cantidades a, b, c de productos de tipo A, B, C. Sean x, y, z las cantidades de kilos de las materias primas X, Y, Z y t la cantidad de horas de mano de obra, que se necesitan para producirlos. Se pide:

      1) Hallar las fórmulas que nos permiten calcular x, y, z, t en función de a, b, c.

      2) Encontrar una matriz P tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. ¿Qué relación hay entre P y R?

   b) Supongamos que las tres materias primas cuestan \$200, \$300 y \$150 por kg, respectivamente. El costo de mano de obra es de \$200 por hora. Si se fabrican 50, 100 y 40 productos de tipo A, B y C, respectivamente. ¿Cuál es el costo total de la producción?

5. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales
$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Verificar $AB = AC$. ¿Se puede asegurar algo respecto a la inveribilidad de A? Justificar la respuesta.

7. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (indicando por qué) o falsas (dando un contraejemplo).

   a) Sean $A \in M_{m\times n}$ y $B \in M_{n\times p}$, con $m, n, p \geq 3$.
      1) Si la primera y tercera columnas de B son iguales, entonces también lo son las de AB.
      2) Si la primera y tercera filas de B son iguales, entonces también lo son las de AB.
      3) Si la primera y tercera filas de A son iguales, entonces también lo son las de AB.

   b) Si $A, B \in M_n$, entonces
      1) $(AB)^2 = A^2B^2$.
      2) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
      3) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

8. Se consideran las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Investigar si son invertibles y en caso afirmativo hallar la inversa.

9. Probar que $A \in M_n$ es invertible si y solo si A^t es invertible, y que en caso afirmativo es $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

10. Probar:

   a) Si $A \in M_{m\times n}$, entonces $AA^t \in M_m$ y $A^tA \in M_n$ son simétricas.

   b) Si $A \in M_n$, entonces $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica.

   c) Si $A \in M_n$, entonces existen únicas $B, C \in M_n$ tales que $A = B + C$, con B simétrica y C antisimétrica.*Sugerencia:* suponer que existe una tal descomposición y calcular $A + A^t$ y $A - A^t$.

11. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

   a) Encontrar operaciones elementales que lleven A en B, B en A, A en C y C en A.

   b) Encontrar matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que $E_1A = B$, $E_2B = A$, $E_3A = C$ y $E_4C = A$.

12. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) Mostrar que B se puede obtener realizando operaciones elementales en las filas de A.

   b) Encontrar una matriz M tal que $B = MA$.

   c) Encontrar una matriz N tal que $A = NB$.

13. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Realizar operaciones elementales en cada una de las matrices anteriores hasta transformarla en una matriz del tipo $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, para un r adecuado.

14. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Determinar si son equivalentes entre sí.