Ejercicios Complementarios – Módulo 1

MOVIMIENTO BROWNIANO

Sección Biofísica y Biología de Sistemas
Facultad de Ciencias, Universidad de la República

1)*(Examen 5/2/2018) En el movimiento browniano que ocurre a una temperatura fija, las partículas se mueven en un medio viscoso. Por lo tanto se trata de una situación en que cada partícula disipa energía. No obstante, este movimiento colectivo es incesante y no se amortigua. Dada esta situación, responda con argumentos precisos si el movimiento browniano obedece a los principios de la termodinámica o si, por el contrario, es una excepción a los mismos.*

Solución:

Primero que nada, el movimiento browniano obedece los principios de la termodinámica. De lo contrario, sería algo extremadamente notable y seguramentehabría sido mencionado.
La aparente contradicción aquí surge por el hecho de que las partículas brownianas (aún en un sistema aislado) están constantemente perdiendo energía (por el rozamiento) pero nunca se detienen, por lo que tienen que estar recibiendo energía del medio constantemente sin que disminuya la temperatura del mismo. Esto parece violar el primer principio de la termodinámica, que dice que la energía en un sistema aislado se conserva: aquí parece por un lado no haber transferencia de calor pero si haber transferencia de trabajo. Esto se resuelve si nos damos cuenta que la energía perdida por rozamiento es transferida de nuevo al medio, que luego se reutiliza para mover otras partículas brownianas, con lo que no se genera energía.
La sutileza de este razonamiento está en entender que el "flujo de calor" microscópico se compensa rápidamente (y microscópicamente) con el trabajo, con lo que no ocurre ningún cambio en la temperatura (una propiedad colectiva y macroscópica).

2)*Indique de qué forma puede ser utilizada para determinar la viscosidad del medio, la ecuación que Einstein obtuvo en sus investigaciones sobre el movimiento browniano*

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

(k_B: constante de Boltzmann; T: temperatura en Kelvin;π: la constante matemática;

η: la viscosidad del medio en que se mueven las partículas brownianas; r: radio de las partículas esféricas observables en el movimiento browniano).

Indique qué datos serían necesarios, y en el caso de ser datos físicos, indique los experimentos o determinaciones necesarias para obtenerlos.

Solución:

El sector fácil del problema es despejar la viscosidad "eta" de la ecuación de Einstein:

$$\eta = \frac{k_B T}{6\pi r D}$$

Luego también es fácil el hecho de que pi y la constante de Boltzmann son constantes universales, obtenibles inmediatamente en tablas. Pero hay un elemento importante a discutir con ellos: las unidades de la constante de Boltzmann, que deben ser consistentes con todas las que usen en la ecuación.

T sale de un termómetro que mida la temperatura del medio en que ocurre el movimiento, por lo que luego esa temperatura debe ser transformada el Kelvin.

El radio de las partículas r es un asunto sutil, ya que requiere que todas las partículas sean esféricas y (en teoría) iguales. Dado eso, el radio r se mide porque las partículas sean visibles en el microscopio óptico. Otro tema sutil es que si los radios tienen una variación no radical, quizá r podría ser un promedio.

La obtención de D también es sutil. Podría obtenerse de un estudio de difusión bien planeado que usara la ley de Fick: depositar las partículas en una zona y ver como el colectivo de partículas evoluciona en el tiempo mediante el registro densitométrico. Eso da una curva de difusión y de ahí, con alguna de las versiones de la ley de Fick acordes al diseño del experimento (la primera, vectorial o la segunda, derivadas parciales) obtener el D.

El otro método, más fácil, es hacer un "experimento" Perrin, seguir las trayectorias brownianas (hoy día mediante algún "tracking" adecuado), y conseguir medidas suficientes como para determinar los promedios de los cuadrados que les permitan tener la primera ecuación del Einstein:

$\langle X^2 \rangle = 2Dt.$

Entonces, de los distintos tiempos de observación t y los promedios $\langle X^2 \rangle$, despejan D.

Así tienen todo lo necesario para obtener la viscosidad.

3)*Demuestre que, para una partícula browniana moviéndose en un medio tridimensional,* $\overline{X^2} = 6Dt$*, donde X es el módulo del vector posición en el espacio* $(\vec{X} = (X_1, X_2, X_3))$*.*

Nota: Recuerde que $\overline{X^2} = 2Dt$ *corresponde a una dimensión, por lo que es válido para cada una de las componentes del vector posición. Se recomienda tener en cuenta el Teorema de Pitágoras para abordar el problema, y tener cuidado al operar con el promedio.*

Solución:

La definición de desvío cuadrático medio es:

$$\overline{X^2} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}{n}$$

Ahora, tengamos en cuenta el Teorema de Pitágoras:

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

Aplicando esto último en el cálculo del desvío cuadrático medio tenemos:

$$\overline{X^2} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + X_{3i}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_{1i}^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_{2i}^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_{3i}^2}{n} = 2Dt + 2Dt + 2Dt = 6Dt$$

Tenga en cuenta que el promedio se transformó en la suma de tres promedios gracias a la propiedad asociativa de los números reales.

4)*Considere dos soluciones de partículas brownianas esféricas. En una de ellas (solución A), el radio de las partículas brownianas es 2r y su concentración es de 10 mM. La otra (solución B), presenta una concentración de 100 mM de partículas de radio 3r. ¿Cómo será comparativamente el desvío cuadrático medio ($\overline{X^2}$) de una partícula esférica de radio r inmersa en ambas soluciones? Justifique su respuesta.*

Solución:

El $\overline{X^2}$ de la partícula de radio r será igual en las soluciones A y B. Esto es así ya que el movimiento browniano se debe a los choques de las moléculas que componen el medio, con la partícula browniana suspendida en el mismo. Las eventuales interacciones con otras partículas brownianas vecinas no interfieren en tal sentido. Por lo tanto, el tamaño y la concentración de las otras partículas brownianas suspendidas en las soluciones A y B, no influyen en la determinación del $\overline{X^2}$ de la partícula de radio r que estamos considerando.

5)*Una molécula de radio r = 4.5 x 10^{-8} cm ingresa a una célula eucariota mediante un mecanismo de transporte específico. Para llegar al lugar en donde la misma será metabolizada, debe difundir una distancia de 5 µm, lo cual le lleva promedialmente 4.0 x 10^{-2} s. Sabiendo que la ecuación de difusión para una partícula browniana en tres dimensiones es $\overline{X^2}$ = 6Dt, calcule la viscosidad (η) del citoplasma.*

Datos: k_B = 1.38 x 10^{-23} J.K^{-1}, T = 298 K.

Solución:

Sabemos que:

r = 4.5 x 10^{-8} cm
d = 5.0 x 10^{-4} cm = $\sqrt{\overline{\mathrm{X}^2}}$ = $\sqrt{6Dt}$
t = 4.0 x 10^{-2} s

Por tanto:

$$D = \frac{d^2}{6t} = \frac{\mathrm{K_b.T}}{6.\pi.\eta.r}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\mathrm{K_b.T}.6.t}{6.\pi.r.d^2} = \frac{1.38\ x10^{-19}\ \mathrm{Kg.cm^2.s^{-2}K^{-1}}.298\ \mathrm{K}.4.0\ x10^{-2}\ \mathrm{s}}{\pi.4.5\ x10^{-8}\ \mathrm{cm}.(5.0\ x10^{-4}\ \mathrm{cm})^2}$$

$$\eta = 4.65\ x10^{-5}\ \mathrm{Kg.cm^{-1}.s^{-1}}$$

6)*Si una partícula que experimenta movimiento browniano se desplaza en promedio una distancia x en un tiempo t, ¿cuánto tiempo debería transcurrir para que ocurra un desplazamiento promedio igual a $3x$?*

Solución:

Según la ecuación de Einstein, tenemos que si una partícula se desplaza x en un tiempo t, verifica lo siguiente:

$$x^2 = 2Dt$$

Ahora, si se quiere que la partícula se desplace 3x, tenemos que

$(3x)^2 = 9x^2 = 2Dt_2$, siendot_2 el tiempo que le lleva desplazarse $3x$ y lo que se quiere calcular.

Además, sabemos que

$$9x^2 = 9 \times (2Dt) = 2D(9t) \implies t_2 = 9t$$

Por lo tanto, si queremos que la partícula se desplace 3 veces más, se requiere nueve veces el tiempo inicial.

7)*Si una partícula que experimenta movimiento browniano se desplaza en promedio una distancia x en un tiempo t, ¿cuánto se desplazará en un tiempo igual a $4t$?*

Solución:

Si miramos la ecuación de Einstein para el desplazamiento medio, como la partícula se desplaza x en t, tenemos que:

$$x = \sqrt{2Dt}$$

Además, queremos conocer cuánto se desplazará en un tiempo igual a $4t$, es decir, $x_2 = \sqrt{2D(4t)}$, siendo x_2 lo que queremos calcular.

Ahora, simplemente reordenamos un poco la expresión, y tenemos que

$$x_2 = 2\sqrt{2Dt} \implies x_2 = 2x$$

Por lo tanto, en un tiempo cuatro veces mayor, la partícula se desplazará el doble.

8*) Durante el análisis de la difusión de una partícula en un medio de origen biológico se obtuvieron datos de posición de la partícula en función del tiempo. Una vez calculados los valores de desvío cuadrático medio para la partícula, se procedió a construir el gráfico $ln\left(\overline{X^2}\right)$ vs $ln(t)$ y se obtuvo una recta con pendiente 0,75 y ordenada en el origen b>0.*

Una de las conclusiones extraídas de este análisis es que el comportamiento difusivo de la partícula en ese medio en particular no se ajusta a lo predicho por el modelo de Einstein.

Explique cómo se puede llegar a esa conclusión.

Solución:

Por la información de la letra, la recta obtenida corresponde con:

$$ln\left(\overline{X^2}\right) = 0{,}75 * ln(t) + b$$

Considerando que $b = ln(e^b)$ y las propiedades del logaritmo tenemos:

$$ln\left(\overline{X^2}\right) = ln(t^{0,75}) + ln(e^b) = ln(e^b t^{0,75}) \Rightarrow \overline{X^2} = e^b t^{0,75}$$

Donde e^b es un parámetro relacionado con la capacidad de difusión de la partícula en el medio en cuestión.

Si recordamos que en el modelo de Einstein el desplazamiento cuadrático medio es directamente proporcional al tiempo ($\overline{X^2} \propto t$), podemos ver que en este ejemplo esa relación no se cumple, puesto que el tiempo presenta un exponente distinto de 1.

Nota 1: La constante e^b está relacionada con la capacidad difusiva de la partícula en ese medio. Ocupa el lugar del factor 2D.

Nota 2: Este tipo de difusión se conoce como difusión anómala y se aparta de la difusión convencional por presentar relación no lineal entre $\overline{X^2}$ y t. Es un fenómeno observado en medios con muy alta concentración, que presentan heterogeneidades o en sistemas que presentan transporte activo.

9)*Supóngase que se tiene un tubo de vidrio largo lleno de un líquido, en el que se colocan partículas de tamaño microscópico (capaces de ser sometidas al movimiento browniano). Recordando que, por los estudios del movimiento browniano en una dimensión, si se comienza con un gran número de partículas brownianas en un punto y se deja que pase suficiente tiempo, las mismas terminan distribuyéndose de forma uniforme cuando se llega al equilibrio. En general pensamos en un tubo horizontal para estos razonamientos pero, si hacemos el mismo experimento en un tubo vertical, depositando un gran número de partículas en un solo punto ¿Cómo esperamos que sea (a grandes rasgos) la distribución en equilibrio? ¿Hay alguna contradicción?*

Puede ser útil pensar en lo siguiente: Supóngase que se tiene un tubo de vidrio largo dispuesto verticalmente, y que se coloca en su extremo superior una pelota de tamaño macroscópico de densidad mayor al medio. ¿Qué ocurre con la misma? Ahora, ¿qué pasa si en vez de ser de gran tamaño, se coloca una molécula aproximadamente esférica, de densidad mayor que el medio? En ambos caso ¿que pasa si la densidad es menor que la del medio?

Solución:

A diferencia de lo que pasa en el caso horizontal, las partículas brownianas no se distribuyen uniformemente en equilibrio en la dirección vertical. Esta situación se da porque, además del empuje por las partículas del medio y el rozamiento con el medio (que juntos nos dan el movimiento browniano) las partículas están sometidas a la acción de la gravedad y el empuje del medio. De esta forma, si las partículas son más densas que el medio, cada partícula experimentará una fuerza neta hacia abajo, por lo que esperaríamos que se acumularan todas en el fondo. Sin embargo, esto generaría un gran gradiente de concentración, por lo que sabemos que el movimiento browniano tendería a disiparlo. En equilibrio esperamos que ocurra una especie de compensación de estas dos tendencias, sin llegar a ninguno de los dos extremos (todo concentrado en el fondo vs. Distribución uniforme) por lo que se espera (a grandes rasgos) que haya una mayor concentración en el fondo, que va disminuyendo a medida que subimos por el tubo.

Similarmente, si las partículas brownianas son menos densas que el medio, la fuerza neta es de sentido contrario y se esperaría una distribución inversa: más concentración arriba y menos abajo en equilibrio.

Hay que observar que no hay contradicción con nuestra teoría porque en general suponemos que no hay fuerzas externas actuando sobre las partículas (eg: que no hay campo eléctrico) cuando estudiamos el movimiento browniano. Esto lo podemos hacer “en horizontal” porque despreciamos la dirección vertical, pero si nos concentramos en un tubo vertical, esto es imposible y hay que tomarla en cuenta. Algo similar pasa por ejemplo, con la concentración del aire, que disminuye a medida que aumenta la altitud. Aunque en este último caso no hay “movimiento browniano”, la similitud surge porque se modela (implícitamente) el movimiento de las partículas brownianas según las leyes de los gases ideales.