Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta
Año 2023

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

## Repartido 4: Cardinalidad

1. Sean $A, B$ conjuntos finitos. Probar que
   a) Si existe una función inyectiva $f : A \to B$, entonces la cantidad de elementos de $A$ es menor o igual que la de $B$.
   b) Si existe una función sobreyectiva $f : A \to B$, entonces la cantidad de elementos de $A$ es mayor o igual que la de $B$.
   c) Si existe una biyección $f : A \to B$, entonces $A$ y $B$ tienen la misma cantidad de elementos.

2. a) Probar, por inducción en $n$, que todo subconjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ es finito.
   b) Sea $B$ un conjunto finito.
      1) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $A$ es finito y $\#A \leq \#B$.
      2) Probar además que si la inclusión es estricta entonces la desigualdad entre cardinales también.

3. Sean $A, B$ conjuntos con $n$ elementos y $f : A \to B$ una función. Probar que son equivalentes:
   - $f$ es inyectiva
   - $f$ es sobreyectiva
   - $f$ es biyectiva

4. Sea $\mathcal{X}$ una colección de conjuntos. Probar que la equipotencia define una relación de equivalencia en $\mathcal{X}$. Describir su cociente en el caso de que los elementos de $\mathcal{X}$ sean todos conjuntos finitos.

5. Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

6. Demuestre que entre 50,000 personas hay al menos dos que nacieron exactamente el mismo día.

7. Probar que dados 5 puntos dentro de un triángulo equilátero de lado 2, existe al menos un par de ellos que están a una distancia menor o igual a 1.

8. Probar esta versión más general del principio del palomar: si se meten $n.m + 1$ palomas en $n$ jaulas, entonces hay una jaula que tiene por lo menos $m + 1$ palomas.