Práctico 4: Esperanza de variables aleatorias[1]

1. Al invertir en la bolsa de valores, una persona puede lograr una ganancia de 4000 dólares en un año con una probabilidad de 0,3 o bien tener una pérdida de 1000 dólares con probabilidad 0,7. ¿Cuál sería la ganancia esperada de esta persona?

2. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por:

$$p_X(x) = KC_x^3 \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} \quad \text{con } x = 1, 2, 3.$$

Hallar K y la esperanza de X.

3. La función de densidad de la variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi\,(1+x^2)} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es el valor esperado de X?

(b) Si ahora definimos una variable aleatoria Y tal que $Y = 3X + 1$, ¿cuál es el valor esperado de Y?

4. Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes distribuciones:

1. $\mathcal{U}\{1, ..., n\}$ (uniforme discreta)
2. $\mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson)
3. $\text{Geo}(p)$ (geométrica)
4. $\mathcal{U}[a, b]$ (uniforme continua)
5. $\exp(\lambda)$ (exponencial)
6. $N(\mu, \sigma^2)$ (normal)

5. Calcular la esperanza y varianza de la distribución $\text{BN}(k, p)$ (binomial negativa). *Sugerencia:* Utilizar que si $X_1, \ldots, X_k$ son i.i.d. con distribución $\text{Geo}(p)$, entonces $X_1 + \cdots + X_k \sim \text{BN}(k, p)$.

6. Calcular la esperanza y varianza de la distribución $\mathcal{H}(n; N; D)$ (hipergeométrica).

7. Si a ud. le dicen que el 12 % de la población está desempleada, el 48 % tiene un solo empleo, el 35 % tiene dos empleos y el 5 % tiene tres, y por otra parte en una muestra tomada al azar, de manera independiente, de 1400 personas resulta que el promedio de empleos por persona es 2.04.

(a) ¿Usted qué diría? ¿Le parece que algún dato puede estar mal, o no? Si algún dato puede estar mal, ¿de cuáles sospecharía? ¿Qué tipos de errores podría contener la información?

(b) Si además, entre esas 1400 personas hay 312 desempleados, ¿qué respondería a las preguntas anteriores?

[1] *Para trabajar en la semana 6*

8. Sea $U \sim \mathcal{U}[0,1]$.

(a) Hallar la función de distribución de la variable aleatoria $X = \frac{1}{\sqrt{U}}$, su densidad y su esperanza.

(b) Verificar que la esperanza coincide con el valor hallado mediante la fórmula

$$\mathbf{E}\left(g(U)\right) = \int g(t) f_U(t) dt$$

.

Desigualdad de Chebyshev

9. Demostrar la siguiente desigualdad:
Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geq 0\, \forall x$, X v.a. y $a > 0$, entonces

$$\mathbf{P}\left(g(X) \geq a\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(g\left(X\right)\right)}{a}.$$

Sugerencia: $g(X) \geqslant a\mathbf{1}_{\{g(X) \geqslant a\}}$.

10. Demostrar la Desigualdad de Chebychev: Si X es una v.a. tal que $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, entonces

$$\mathbf{P}\left(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{var}X}{\varepsilon^2} \ \forall \varepsilon > 0.$$

11. La producción diaria de motores eléctricos en una fábrica es (en promedio) $\mu = 120$ con una desviación estándar de $\sigma = 10$. Hallar un intervalo que contenga por lo menos el 90 % de la cantidad diaria de motores producidos.

12. El costo diario por conectarse a un servidor de internet tiene una media $\mu = 13$U$ con una desviación estándar de $\sigma = 6{,}4$U$. Acotar la probabilidad de que el costo sea mayor que 30 U$.

13. Una empresa de electrónica se encarga de suministrar tarjetas de impresoras a una fábrica de montaje de microcomputadoras. Se estudió la demanda mensual de tarjetas durante algunos meses y se vio que el promedio era $\mu = 280$ con una desviación estándar de $\sigma = 4$.

¿Cuál es la cantidad de tarjetas que debe tener la empresa de electrónica al principio de cada mes para que la demanda sea mayor que la oferta cuando mucho con una probabilidad de 0,10?