

I.4 - Trabajo y energía

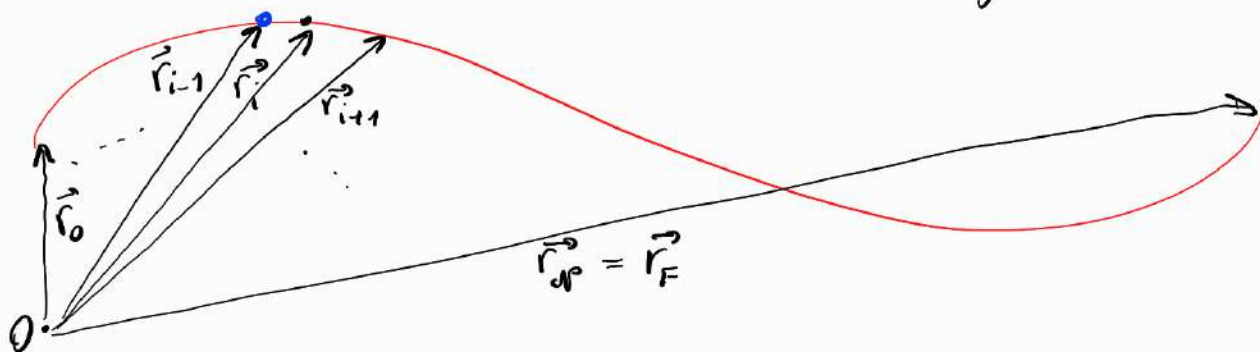
El concepto de energía es uno de los más frecuentes de la física y que hace su aparición en muchas o todas las ramas de ésta: ondas, electromagnetismo, mecánica cuántica, mecánica estadística, termodinámica, fluidos, etc.

La característica central que hace a este concepto tan popular es su conservación.

I.4.1 - Nociones básicas: trabajo y potencia

Comenzamos esta sub-unidad por definir el concepto de trabajo de una fuerza.

Consideremos una partícula P de masa m que sigue una trayectoria $\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_F}$ en el espacio. Mientras tanto, actúa sobre ella una fuerza $\vec{F}$ (que puede ir variando a lo largo de la trayectoria). Discretizamos la trayectoria en N desplazamientos $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$ suficientemente chicos para que $\vec{F}$ sea aproximadamente constante e igual a $\vec{F}_i$.



El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ en el intervalo i -ésimo es: $\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$. El trabajo W_F de una fuerza sobre una partícula P a lo largo de $\mathcal{C}$ lo generalizamos a partir de esta descripción esquemática como:

$$W_F = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \leftarrow \text{Integral de línea}$$

(con $\Delta r_i \rightarrow 0$)

Recordemos/Notemos que esto significa que parametrizamos la curva $\mathcal{C}$ por un parámetro λ / $\vec{r}(\lambda): [0,1] \rightarrow \mathcal{C}$ con $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ y $\vec{r}(1) = \vec{r}_F$, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_F}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda$$

Veamos algunos ejemplos típicos

1) Trabajo de una fuerza constante $\vec{F} = \vec{F}_0$ al ir de $\vec{r}_a$ a $\vec{r}_b$

$$W_{\vec{F}_0} = \int_{\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_b} \vec{F}_0 \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \vec{F}_0 \cdot \int \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_a) = \vec{F}_0 \cdot \Delta\vec{r}_{\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_b}$$

El trabajo de una fuerza constante es independiente de la curva $\mathcal{C}$.

2) Trabajo de una fuerza perpendicular al movimiento

$$\text{si } \vec{F}_\perp \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \vec{r} \Rightarrow W_{\vec{F}_\perp} = 0$$

Un ejemplo de esto es la fuerza magnética sobre una carga:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{supongamos que } \lambda \text{ es el tiempo } \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$\Rightarrow W_{\vec{F}_m} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{\mathcal{C}} q (\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\perp \vec{v}}) \cdot \vec{v} dt \Rightarrow W_{\vec{F}_m} = 0$$

3) Trabajo de la fuerza de rozamiento

La fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ tiene la forma $\vec{F}_{roz} = -F_{roz} \hat{v}$ siendo $\hat{v} = \hat{t}$ el versor que apunta según la velocidad y $F_{roz} > 0$.

De esta forma tendremos que

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}_{roz}} &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{roz} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{roz} \cdot \hat{t} ds \\ &= - \int_{s_0}^{s_f} \underbrace{F_{roz}}_{> 0} ds < 0 \end{aligned}$$

Esto significa que el trabajo de la $\vec{F}_{roz}$ cinética es siempre negativo

La rapidez con la que una fuerza $\vec{F}$ realiza trabajo es una cantidad que puede ser de interés. A esta cantidad la denominamos $P_{\vec{F}}$, potencia de la fuerza $\vec{F}$.

En un pequeño desplazamiento $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$, el trabajo de una fuerza $\vec{F}$ es

$$\Delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Delta t$$

Por lo tanto, definimos la potencia instantánea de la fuerza $\vec{F}$ como:

$$P_{\vec{F}}(t) \equiv \frac{dW_{\vec{F}}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{\vec{F}}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

El símbolo $dW_{\vec{F}}$ o $\Delta W_{\vec{F}}$ representa la dependencia en el camino del trabajo.

Recíprocamente, la potencia $P_{\vec{F}}(t)$, asociada a la fuerza $\vec{F}$, nos dice que en un intervalo de tiempo desde t_0 a t_F , el trabajo de dicha fuerza es:

$$W_{\vec{F}} = \int_{t_0}^{t_F} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_F} P_{\vec{F}}(t) dt$$

En el sistema internacional (SI), las unidades del trabajo son los Joules (J) y las unidades de la potencia son los Watts ($\frac{J}{s}$)

I.4.2 - Fuerza neta y energía cinética

La introducción del concepto de energía, al menos a nivel de la mecánica clásica no tiene un carácter fundamental sino práctico.

Esto se refleja en un resultado muy conocido denominado Teorema del trabajo y la energía cinética. Este teorema relaciona el trabajo neto realizado por todas las fuerzas, sobre una partícula, con la variación de una cantidad dependiente de la velocidad.

Definimos el trabajo neto sobre una partícula P a lo largo de una curva C como:

$$W_{\text{neto}} \equiv \sum_j W_{\vec{F}_j}, \quad \text{siendo } \vec{F}_j \text{ las fuerzas actuantes sobre la partícula P}$$

Tenemos entonces que el trabajo neto es:

$$W_{\text{neto}} = \sum_j \int_C \vec{F}_j \cdot d\vec{r} = \int_C \left(\sum_j \vec{F}_j \right) \cdot d\vec{r} = \int_C m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

2^{da} ley de la mecánica para una partícula de masa m

Pero entonces, parametrizando la curva con el tiempo es

$$W_{\text{neto}} = \int_{t_0}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} m \frac{d\vec{v}^2}{dt} dt = \frac{1}{2} m \int_{\vec{v}_0^2}^{\vec{v}_f^2} d(\vec{v}^2)$$

y por lo tanto tenemos el resultado:

$$W_{\text{neto}} = \frac{m \vec{v}_f^2}{2} - \frac{m \vec{v}_0^2}{2}$$

Definimos la energía cinética K de una partícula P de masa m como el trabajo neto realizado sobre ésta cuando se hallaba inicialmente en reposo.

Es decir, $K \equiv W_{\text{neto}}(\vec{v}_0=0) = \frac{m \vec{v}^2}{2}$. Esto nos permite decir que una partícula con velocidad $\vec{v}$ tiene una energía cinética $K = \frac{m \vec{v}^2}{2}$.

En resumen, el teorema del trabajo y la energía cinética puede notarse como:

$$\boxed{W_{\text{neto}} = \Delta K = K_f - K_0}$$

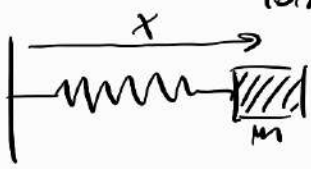
Observación:

La potencia neta $P_{\text{neto}}(t)$ dada por $P_{\text{neto}}(t) = \left(\sum_j \vec{F}_j \right) \cdot \vec{v}$ puede escribirse como:

$$P_{\text{neto}}(t) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{v}^2}{2} \right) = \frac{dK}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{neto}}(t) = \frac{dK}{dt}}$$

Ejemplos: 1) Consideremos un sistema masa-resorte, de longitud natural l_0 .



La fuerza sobre la masa m es

$$\vec{F}_{el} = -k(x - l_0)\hat{i}$$

y el trabajo neto de la fuerza al ir desde la posición $\vec{r}_0 = a\hat{i}$ a $\vec{r}_f = b\hat{i}$ es:

$$W_{\text{neto}} = W_{\vec{F}_{el}} = -k \int_a^b (x - l_0)\hat{i} \cdot d\vec{r} = -k \int_a^b (x - l_0)\hat{i} \cdot dx\hat{i} = -\frac{k(b - l_0)^2}{2} + \frac{k(a - l_0)^2}{2}$$

Si la partícula estaba inicialmente en reposo, entonces

$$W_{\text{neto}} = K_f - K_o = K_f = \frac{m\vec{v}_b^2}{2}$$

y por lo tanto será:

$$\boxed{\vec{v}_b = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{(a - l_0)^2 - (b - l_0)^2} \hat{i}}$$

El signo dependerá de la curva $\mathcal{C}$.

2) Consideremos una partícula de masa m moviéndose sobre una superficie horizontal y rugosa con coeficiente de rozamiento cinético μ_c .

El trabajo neto $W_{\text{neto}} = W_{\vec{F}_{roz}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{P}}$,

dado que la normal y el peso son perpendiculares al movimiento, éstas no realizan trabajo. Por ende, dado que $\vec{N} + m\vec{g} = 0$
 $\Rightarrow N = mg$ ($m\vec{g} = -mg\hat{j}$, siendo $\hat{j}$ lo vertical)

$$W_{\text{neto}} = W_{\vec{F}_{roz}} = -\mu N \int_{s_0}^{s_f} ds = -\mu N \Delta S$$

$\nwarrow$ distancia recorrida

Si la partícula partía con velocidad $\vec{v}_0$, la distancia máxima recorrida será cuando la partícula alcance el reposo y, por tanto, será:

$$W_{\text{neto}} = -\mu mg \Delta S_{\text{max}} = \Delta K = -\frac{m\vec{v}_0^2}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta S_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

I.4.3 - Energía potencial y fuerzas conservativas

Muchas veces sucede que el trabajo realizado por las fuerzas no depende del camino seguido sino, únicamente, de las posiciones inicial y final. En tales casos, decimos que las fuerzas son conservativas.

Más concretamente, una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si ésta depende, únicamente, de la posición $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ y si el trabajo realizado por la fuerza, entre dos puntos arbitrarios $\vec{r}_0$ y $\vec{r}_F$, es independiente de la curva $\mathcal{C}$ que la partícula siguió al ir de $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_F$. Entonces será:

$$W_{\vec{F}, \vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_F, \mathcal{C}_1} = W_{\vec{F}, \vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_F, \mathcal{C}_2} = -W_{\vec{F}, \vec{r}_F \rightarrow \vec{r}_0, \mathcal{C}_2} \Rightarrow W_{\vec{F}, \vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_F, \mathcal{C}_1} + W_{\vec{F}, \vec{r}_F \rightarrow \vec{r}_0, \mathcal{C}_2} = 0$$

$\forall \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y por lo tanto, sea $\mathcal{C}_{\text{cerrada}}$ la curva $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, tenemos que para una fuerza conservativa $\vec{F}$ es:

$$\boxed{W_{\vec{F}, \mathcal{C}_{\text{cerrada}}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0} \quad \forall \mathcal{C}$$

Es decir, si la fuerza es conservativa, su trabajo en un ciclo es nulo.

Si $\vec{F}$ es conservativa $\Rightarrow \exists$ un potencial $U(\vec{r})$ asociado a la fuerza $\vec{F}$ que denominamos energía potencial asociada a la fuerza $\vec{F}$ / $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}$

Prueba:

Dada una fuerza $\vec{F}$ dependiente de la posición $\vec{F}(\vec{r})$, podemos definir $U(\vec{r}, \mathcal{C}) = -\int_{\mathcal{C}, \vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con $\vec{r}_0$ fijo

Si $\vec{F}$ es conservativa, entonces será U independiente de la curva $\mathcal{C}$.

Tomando 3 caminos diferentes, C_1, C_2, C_3 dados por

$$C_1 = \left\{ \{(x_0, y_0, t(z-z_0)+z_0)\}_{t \in [0,1]} \cup \{(x_0, t(y-y_0)+y_0, z)\}_{t \in [0,1]} \cup \{(t(x-x_0)+x_0, y, z)\}_{t \in [0,1]} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \{(x_0, y_0, t(z-z_0)+z_0)\}_{t \in [0,1]} \cup \{(t(x-x_0)+x_0, y_0, z)\}_{t \in [0,1]} \cup \{(x, t(y-y_0)+y_0, z)\}_{t \in [0,1]} \right\}$$

$$C_3 = \left\{ \{(x_0, t(y-y_0)+y_0, z_0)\}_{t \in [0,1]} \cup \{(t(x-x_0)+x_0, y, z_0)\}_{t \in [0,1]} \cup \{(x, y, t(z-z_0)+z_0)\}_{t \in [0,1]} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad U_{C_1}(x, y, z) = - \left[\int_{z_0}^z F_z(x_0, y_0, z') dz' + \int_{y_0}^y F_y(x_0, y', z) dy' + \int_{x_0}^x F_x(x', y, z) dx' \right]$$

etc.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -F_x(\vec{r})$$

análogamente con U_{C_2} y U_{C_3} tendremos que $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y(\vec{r})$ y $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z(\vec{r})$

observaciones: 1) si cambiamos de punto de referencia $\vec{r}_0$,

U cambia únicamente en una constante. $U_{\vec{r}_0} = U_{\vec{r}_0'} - \underbrace{\int_{\vec{r}_0' \rightarrow \vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{cte}$

2) si $\vec{F}$ es conservativa entonces, por el teorema de

$$\text{Schwarz} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\text{Análogamente} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

I.4.4 - Fuerzas no conservativas y energía mecánica

Definimos la energía potencial asociada a una fuerza $\vec{F}$ como $U_{\vec{F}}(\vec{r})$ y la energía potencial total U de una partícula sometida a varias fuerzas conservativas como la suma de todas las energías potenciales:

$$U(\vec{r}) = \sum_{j/\vec{F}_j \text{ es cons.}} U_{\vec{F}_j}$$

Esto nos abre la puerta, finalmente, a definir la energía mecánica E de una partícula como la suma de su energía cinética K y su energía potencial U

$$\boxed{E = K + U} \quad \text{o} \quad \boxed{E = \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{r})}$$

El motivo de esta definición se pone de manifiesto cuando separamos las contribuciones de fuerzas conservativas y no conservativas al teorema del trabajo y la energía cinética

Sea una curva $\mathcal{C}$ que sigue una partícula de masa m desde $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_f$. El trabajo neto lo podemos escribir como

$$W_{\text{neto}} = \int_{\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f}} \sum_j \vec{F}_j \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f}} \sum_k \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f}} \left(\sum_j \nabla U_j \right) \cdot d\vec{r} + W_{\vec{F}_{\text{No cons.}}}$$

$\underbrace{\sum_k \vec{F}_k \cdot d\vec{r}}_{W_{\vec{F}_{\text{No cons.}}}}$

$$W_{\text{neto}} = - \int_{\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f}} \underbrace{\nabla \left(\sum_j U_j \right)}_U \cdot d\vec{r} + W_{\vec{F}_{\text{No cons.}}}$$

pero por la regla de la cadena es:

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = \nabla U \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda = \frac{dU(\vec{r}(\lambda))}{d\lambda} d\lambda$$

y por lo tanto será

$$W_{\text{neto}} = \Delta K = - \int_{\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f}} \frac{dU}{d\lambda} d\lambda + W_{\vec{F}_{\text{No cons.}}} = - \int_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f} dU + W_{\vec{F}_{\text{No cons.}}}$$

reordenando tendremos que:

$$\Delta K + \Delta U = \underbrace{\left(\frac{m\vec{v}_f^2}{2} + U(\vec{r}_f) \right)}_{E_f} - \underbrace{\left(\frac{m\vec{v}_0^2}{2} + U(\vec{r}_0) \right)}_{E_0} = W_{\vec{F}_{\text{No cons.}}}$$

Es decir:

$$\boxed{\Delta E = \int_{\mathcal{C}_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f}} \vec{F}_{\text{No cons.}} \cdot d\vec{r} = W_{\vec{F}_{\text{No cons.}}}}$$

Obs: si no hay fuerzas no conservativas o si estas no realizan trabajo entonces la energía mecánica se conserva!!