Teoría Electromagnética
Curso 2023

Práctico 3
Desarrollo Multipolar. Magnetostática.

1. a) Calcule los momentos dipolares y cuadrupolares cartesianos para las distribuciones de cargas que se muestran en la figura (1a).

b) Calcule los momentos multipolares en coordenadas esféricas q_{lm} para las mismas distribuciones.

c) Para la distribución de la figura (1b) escriba la expresión multipolar del potencial. Manteniendo sólo los primeros órdenes, grafique el potencial en el plano xy como función de la distancia.

d) Determine el potencial exacto en el plano xy mediante la ley de Coulomb y compare con el resultado de (c).

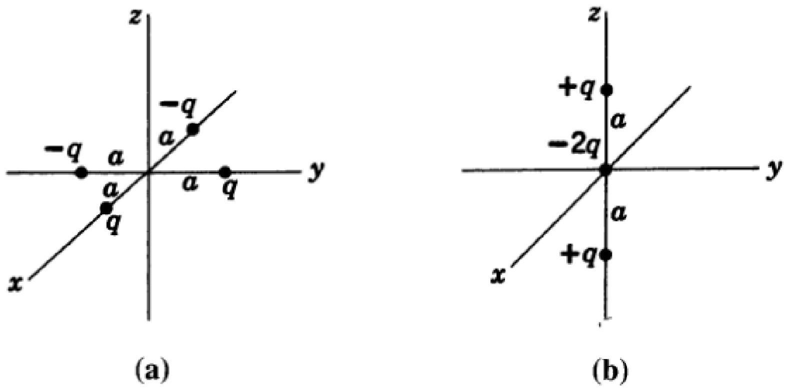

Figura 1: Ejercicio 1.

2. Una distribución de carga localizada tiene una densidad:

$$\rho\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta$$

a) Escriba el desarrollo multipolar del potencial a causa de dicha densidad de carga y determine todos los momentos multipolares no nulos. Escriba el potencial a grandes distancias como una expansión finita de Polinomios de Legendre.

b) Determine el potencial explícitamente en cualquier punto del espacio y demuestre que cerca del origen se aproxima a

$$\Phi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120}P_2\left(\cos\theta\right)\right]$$

c) Si en el origen existe un núcleo de momento cuadrupolar $Q = 10^{-28}m^2$, determine la magnitud de la energía de interacción, asumiendo que la unidad de carga en $\rho\left(\vec{r}\right)$ es la carga del electrón e, y la unidad de longitud es el radio de Bohr $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/me^2 = 0{,}529 \times 10^{-10}m$. Exprese su respuesta como una frecuencia.

Nota: $\int_{r=0}^{r=\infty} r^{4+l}e^{-r}dr = \Gamma\left(l+5\right)$

3. Una carga puntual q es colocada en el vacío a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de permitividad ε y radio a $(a < d)$.

a) Determine el potencial en todo el espacio como una expansión en armónicos esféricos.

b) Determine el campo E_0 cerca del centro de la esfera.

c) Verifique que el en límite $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \to \infty$ se obtiene el mismo resultado que para una esfera conductora.

4. Exprese el desarrollo en armónicos esféricos del potencial vector y de la inducción magnética producida por una espira circular delgada que conduce una corriente I.

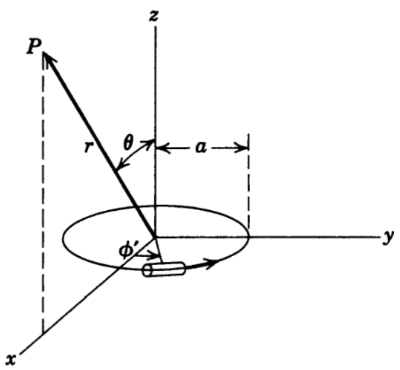

Figura 2

5. Considere un material magnético en forma de esfera de radio a, con una imanación permanente $\vec{M}$, de módulo M_0 y paralela al eje z, que está situada en un medio no permeable.

a) Calcule $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en todo punto del espacio.

b) Esboce las líneas de B y H en todo el espacio.

6. Considere un cáscara esférica de radio interior a y radio exterior b, constituida por un material de permeabilidad μ y situada en una inducción inicialmente uniforme B_0.

a) Calcule $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en todo punto del espacio.

b) Analice en particular el comportamiento de los campos en la región interior de la esfera ($r < a$) en el caso en que $\mu/\mu_0 \gg 1$.

7. Una esfera de radio a con densidad superficial de carga σ (fija en su superficie) está rotando a velocidad angular constante ω. Determine la potencial vector y la inducción magnética en todo el espacio.