

Veamos ahora unos ejemplos acerca de estos conceptos.

- 1) Una partícula de masa m parte del reposo desde una altura h en una curva. Hallar la velocidad final.



las fuerzas involucradas son $m\vec{g}$ y $\vec{N}$ siendo que $W_{\vec{N}} = 0$ ya que $\vec{N}$ es $\perp$ al movimiento y $U(\vec{r}) = mgz + \text{cte}$ ($m\vec{g} = -\nabla U = -mg\hat{k}$) entonces la

energía se conserva. Tomamos $U(z=0) = 0$ para fijar la cte $\Rightarrow E = \frac{m\vec{v}^2}{2} + mgz$ $E_F = \frac{m\vec{v}^2}{2}$ y $E_0 = mgh$
 $\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$

- 2) si $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{e}_r \Rightarrow \exists U / \vec{F} = -\nabla U$

Prueba:

En esféricas $-\nabla U = -\left[\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right]$

$\Rightarrow$ como debe ser $\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -F_\theta = 0$ y $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} = -F_\phi = 0 \Rightarrow U$ no depende de θ o ϕ

$\Rightarrow U = U(r)$ pero entonces debiera ser $F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$

$\Rightarrow$ Definiendo $U(r) \equiv -\int_{r_0}^r F(r') dr'$ logramos construir el potencial (r_0 es arbitrario)

como casos particulares podemos considerar $\vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{k}{r^2} \hat{e}_r$

o $\vec{F}_1(\vec{r}) = -k(r - r_0) \hat{e}_r$, de donde obtendremos los potenciales

$$U_2(r) = \frac{k}{r} \quad \text{y} \quad U_1(r) = \frac{k(r - r_0)^2}{2}$$

y por lo tanto la energía $E = \frac{m}{2} (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{e}_\phi)^2 + U(r)$

o reformulando $E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) + U(r)$

Este último ejemplo nos abre la puerta del siguiente tema

I.5 - Fuerzas Centrales y Colisiones

I.5.1 - Fuerzas centrales, centro de masas y cantidad de movimiento angular

Muchas veces las interacciones entre los cuerpos en la naturaleza dependen únicamente de la separación espacial entre los cuerpos involucrados. Ejemplo de esto son la fuerza eléctrica, la atracción gravitatoria o la fuerza de cuerpos unidos por un resorte.

En general, estas fuerzas presentan una simetría esférica y son lo que llamamos fuerzas centrales:

Definición: una fuerza central es aquella que depende únicamente de la distancia al centro de fuerzas y es según la dirección que une a la partícula con el centro de fuerzas:

$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \hat{e}_r$, en estos casos va a existir un potencial

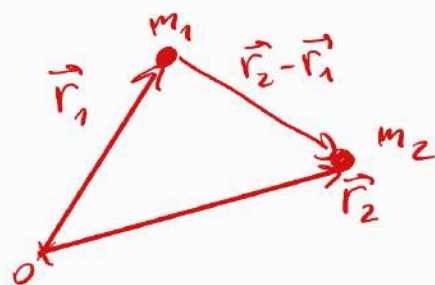
$$U(r) / \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r$$

El problema de dos cuerpos, si bien ambos van a moverse, pueden convertirse a un problema de esta forma para ser tratado:

Planteando la 2^{da} ley de la mecánica Newtoniana a cada una de las partículas vemos que

$$(1) \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$(2) \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$



Donde en el caso gravitatorio $f(x) = -\frac{Gm_1m_2}{x^3}$

definimos $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

¿Por qué?

Sumando (1)+(2) vemos que $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$

y, por lo tanto, es $(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = M \ddot{\vec{R}} = 0$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema.

Por otro lado, realizando la operación $\frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1}$ tenemos:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}} = f(r) \vec{r} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \quad \text{y, definiendo}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{es decir } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Siendo μ la masa reducida, tenemos que:

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \vec{r}} \quad (*)$$

De esta forma se desacoplan ambas ecuaciones y tenemos, por un lado, el movimiento de una partícula libre con posición $\vec{R}$ (¿donde está $\vec{R}_0$?) y el de una partícula de masa μ en la posición $\vec{r}$ sujeta a una fuerza central de la forma original.

Para reconstruir las variables originales es

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{r}_1 = \vec{r} + \frac{m_1}{m_1} \vec{R} - \frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 (m_1 + m_2) = m_1 \vec{r} + m_1 \vec{R} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r}}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r} = \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{R} - \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 \right) - \vec{r} \Rightarrow \vec{r}_1 (m_1 + m_2) = m_2 \vec{R} - m_2 \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r}}$$

En el caso gravitatorio, esto toma la forma:

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{GM\mu}{r^3} \vec{r}}$$

Problema de Kepler.

De aquí en más hablaremos de una sola partícula sujeta a una fuerza central que tiene la forma (*) y nos olvidaremos del problema de si eran 2 partículas o no.

Una cantidad relevante en los problemas de fuerzas centrales: $m\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{e}_r$ es la cantidad de movimiento angular respecto al centro de fuerzas $\vec{L}_0$.

La razón de su relevancia radica en que, al igual que sucede con la energía mecánica en ausencia de fuerzas disipativas, la cantidad de movimiento o momento angular respecto al centro de fuerzas es una constante del movimiento (se conserva). Al ser este un vector determina varios aspectos del movimiento.

Se define el momento angular $\vec{L}_Q$ de una partícula P de masa m y momento lineal $\vec{p}$, respecto a un punto Q como:

$$\vec{L}_Q \equiv (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \vec{p} = (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times m\vec{v}$$

Veamos que $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$, siendo O el centro de fuerzas

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})$$

El término $\vec{v} \times \vec{p} = 0$ ya que es $\vec{v} \times \vec{v} = 0$. por otro lado, en el caso de fuerzas centrales tenemos que $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$ y por lo tanto será también $\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$.

Observación:

Si $\vec{L}_0$ es constante entonces la trayectoria está restringida al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$ (Es decir, el plano perpendicular a $\vec{L}$ que contiene a $\vec{r}$). Además, el módulo de $\vec{L}_0$ constante establece una relación entre las coordenadas que permite reducir los grados de libertad del sistema.

A la cantidad $\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})$ se le denomina momento de la fuerza, o torque, respecto al origen

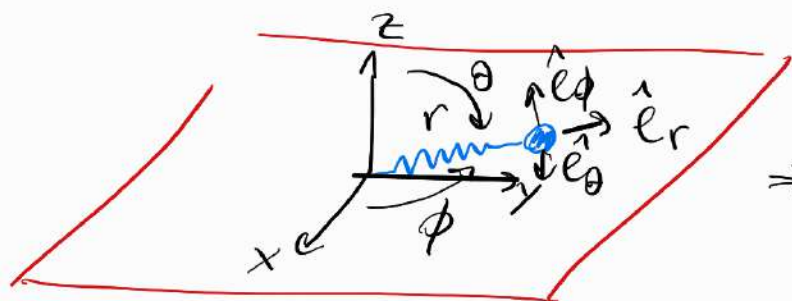
En general, el torque de una fuerza que se aplica en $\vec{r}$ respecto a un punto Q es:

$$\vec{\tau}_Q(\vec{F}) = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{F}(\vec{r})$$

Más adelante volveremos sobre el tema de torques en la unidad III.

Veamos un par de ejemplos

1) Resorte sobre una mesa; hallar $\vec{L}_0$, $U(r)$ y escribir las ecuaciones de movimiento.



$$\vec{F}(\vec{r}) = -\kappa(r - l_0)\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{\kappa(r - l_0)^2}{2} + \text{cte}$$

el momento angular es $\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{e}_r \times m(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi)$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 = mr^2(\dot{\theta}\hat{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\theta) \quad \text{y} \quad |\vec{L}_0| = l = mr^2\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta}$$

En este sistema es $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow L = mr^2|\dot{\phi}|$

las ecuaciones de movimiento se leen

$$m\left\{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{e}_\phi\right\} = -mg\hat{k} + N\hat{k} - \kappa(r - l_0)\hat{e}_r$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{e}_\theta = -\hat{k}$ $\left\{ \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -\kappa(r - l_0)(\hat{e}_r) \rightarrow \overline{m\ddot{r} = -\kappa(r - l_0) + \frac{l^2}{mr^3}} \right.$
 además como $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ $0 = -mg + N(\hat{e}_\theta) \rightarrow \overline{N = mg}$

$$m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = 0(\hat{e}_\phi) \Rightarrow mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} = 0$$

pero $\frac{d}{dt}(l) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} = 0 \rightarrow$ No es otra cosa que la conservación de l .

2) Consideremos nuevamente el problema de Kepler:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{GM\mu}{r^2} \hat{e}_r \Rightarrow U(r) = - \frac{GM\mu}{r} + \text{cte.}$$

En general, para una partícula será $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \mu \vec{v}$ y, en coordenadas esféricas esto es:

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \mu r \hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\phi} \hat{e}_\phi) \\ \Rightarrow \vec{L}_0 &= \mu r^2 (\dot{\theta} \hat{e}_\phi - \dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\theta) \Rightarrow |\vec{L}_0|^2 = L^2 = \mu^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \end{aligned}$$

Recordando la expresión de la energía cinética en coord. esféricas:

$$K = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

y por lo tanto la energía mecánica será:

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

El potencial efectivo $U_{\text{eff}}(r)$ lo definimos como:

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) \quad \text{y es tal que} \quad -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$\Rightarrow$ Si miramos la 2^{da} ley de la mecánica Newtoniana en coordenadas esféricas tenemos que en la dirección $\hat{e}_r$ es:

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) &= F(r) = - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \Rightarrow \mu \ddot{r} &= - \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\mu^2 r^4}{\mu r^3} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) = - \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3} = - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} \end{aligned}$$

Esto es como si tratáramos un problema unidimensional en la dirección $\hat{e}_r$ donde la fuerza no es $F(r)\hat{e}_r$ sino $(F(r) + \frac{L^2}{\mu r^3})\hat{e}_r$.

Alternativamente...

Podemos llegar a la 2^{da} ley de la mecánica en este caso, realizando $\frac{dE}{dt} = 0 = \mu \dot{r} \ddot{r} + \frac{dU}{dr} \dot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} \dot{r} \Rightarrow \mu \ddot{r} = - \frac{dU}{dr} + \frac{L^2}{\mu r^3}$