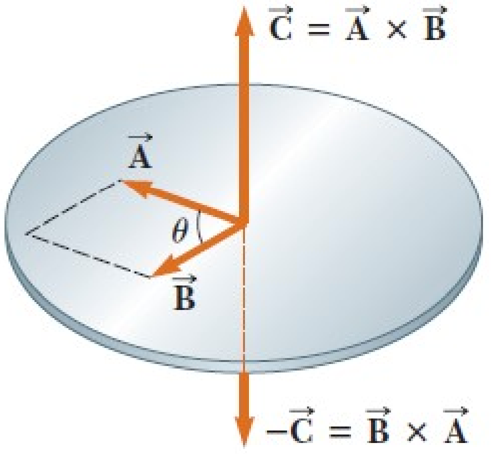
REPASO CLASE PASADA

PRODUCTO VECTORIAL

Es otro vector **C** cuyo módulo vale C=A B senθ, es perpendicular al plano determinados por los vectores **A** y **B**, y sentido dado por la regla de la mano derecha.



Regla de la mano derecha

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

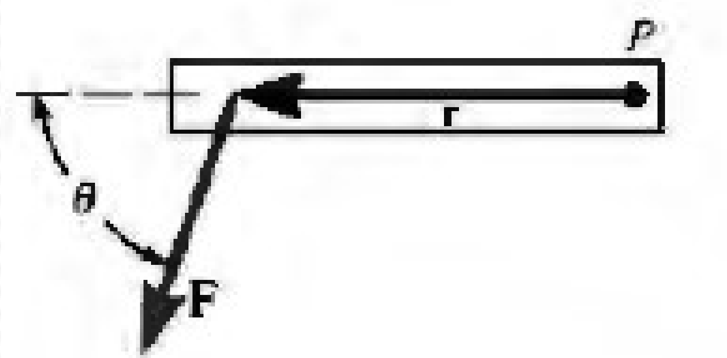
$$C = AB \operatorname{sen} \theta$$

REPASO CLASE PASADA

Estática: estudio de las fuerzas que actúan sobre un objeto que está en equilibrio y en reposo.

Sólido rígido: *modelo de objeto ideal que ocupa un lugar en el espacio y que no cambia su forma ni su tamaño al ser sometido a diferentes esfuerzos.*

Torque: medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para provocar o modificar el movimiento de rotación de un cuerpo.
Es una magnitud vectorial.

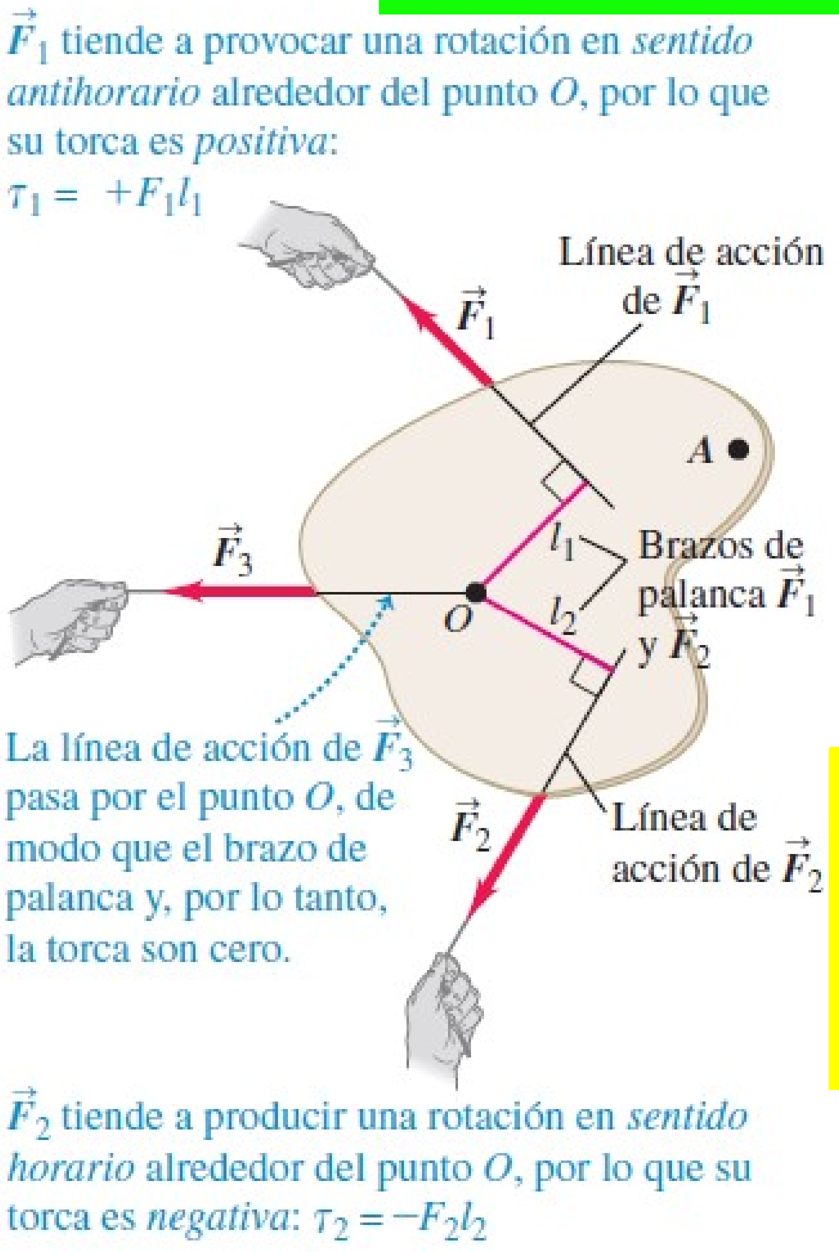


*El **momento** o **torque** τ depende de la **fuerza F,** de la **distancia r** desde* un punto del eje de rotación hasta el punto en que actúa la fuerza y del **ángulo θ** *entre r y F.*

$$\tau = r.F sen\ \theta$$

El módulo del momento o torque alrededor del punto *P* vale: $\tau = r.F sen\ \theta$
*Y veremos que corresponde al módulo de un **producto vectorial**.*

MOMENTO O TORQUE (τ)



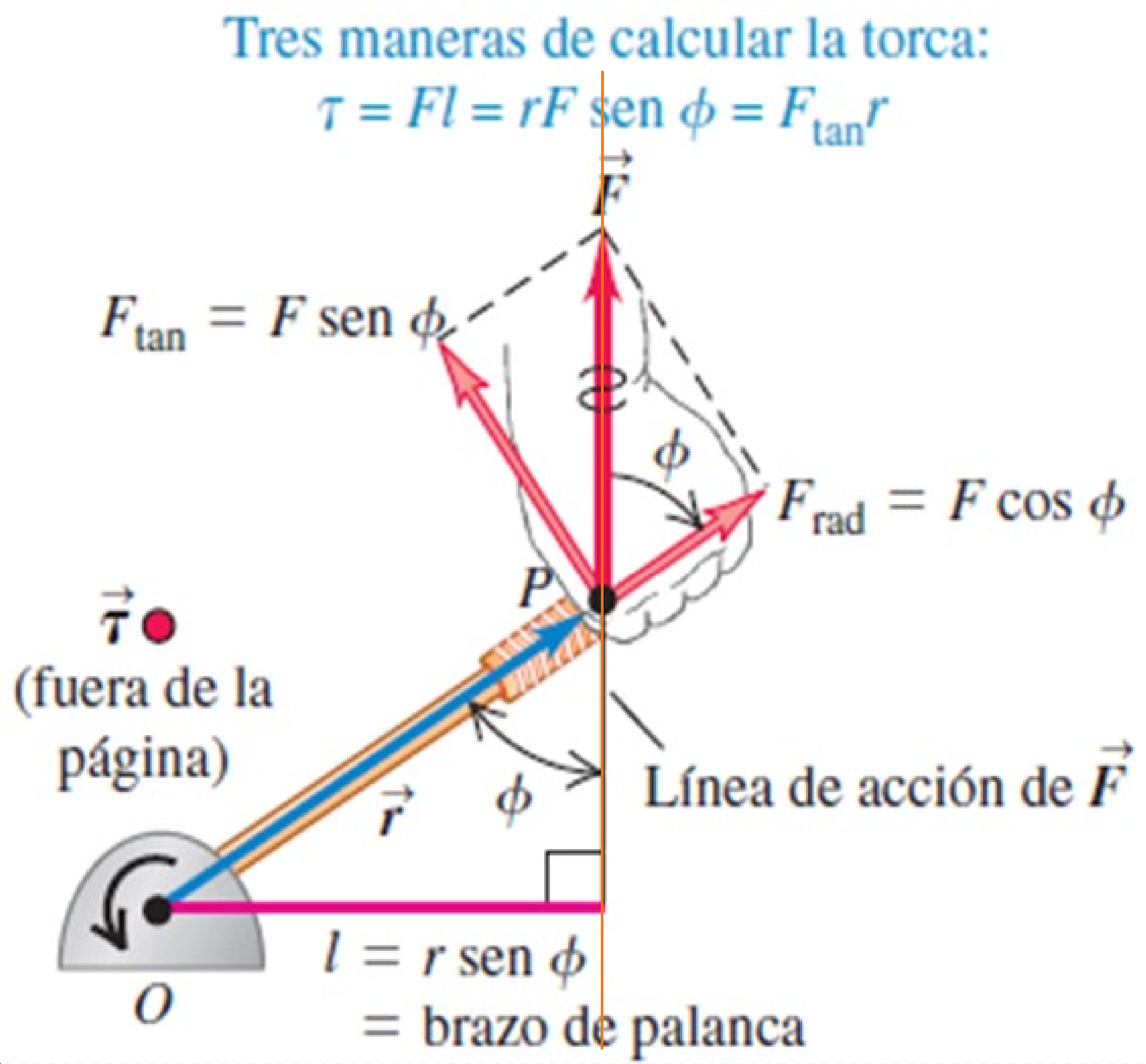
La tendencia de F_1, en provocar una rotación alrededor de *O depende: del módulo de* F_1, *y de la distancia perpendicular* l_1 *(entre el punto O y la línea de acción de la fuerza) que es el* ***brazo de* palanca o brazo de momento.**

Se usa la letra griega τ (tau) para el torque.

$$\tau = F\,l$$

CUIDADO ! El torque siempre se mide con respecto a un punto.
Si modificamos la posición de este punto, el torque de cada fuerza también cambia.

MOMENTO O TORQUE (τ)



$$\tau = Fl = rF \operatorname{sen} \phi = F_{tan} r$$

3 formas para calcular el torque:

1) Encontrar el brazo de palanca *l y utilizar*

$\tau = Fl.$

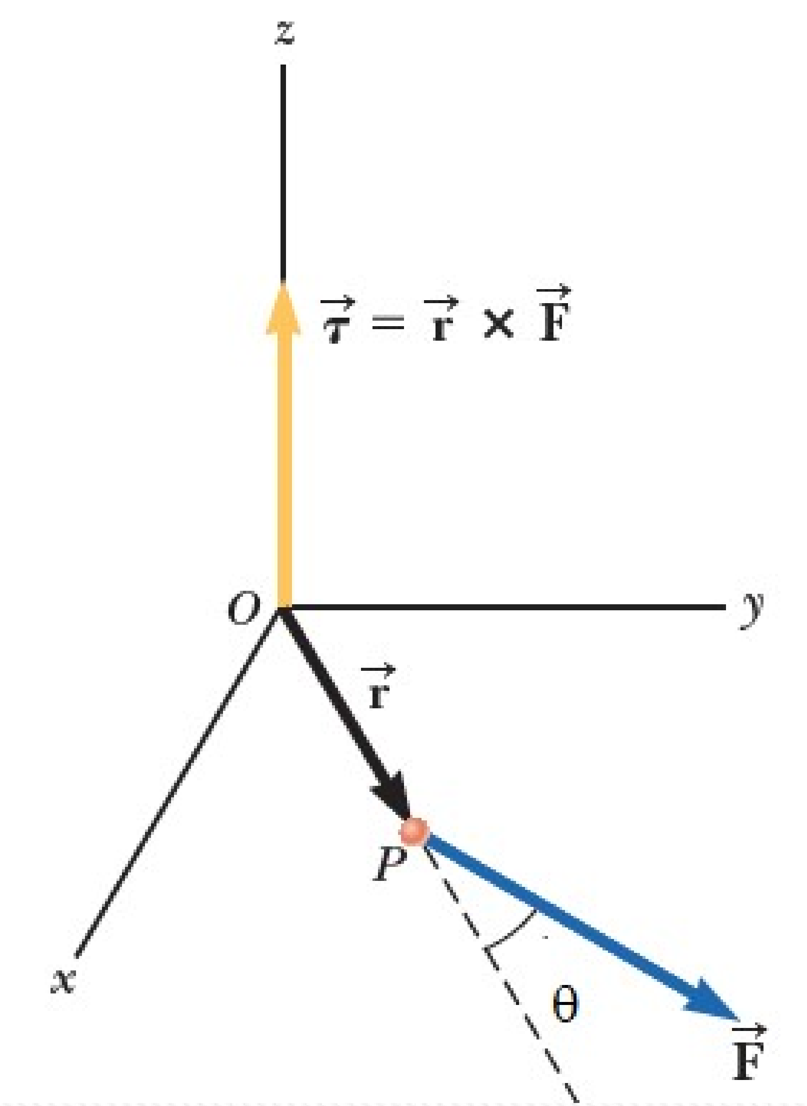
2. Determinar el ángulo Φ entre los vectores **r** y **F**; el brazo de palanca es *r sen Φ, por lo que*

$$\tau = rF \operatorname{sen} \Phi.$$

3. *Descomponer **F** en F_{tan} y F_{rad} con respecto a la dirección de **r**.*

$\tau = r(F \operatorname{sen} \Phi) = r.F_{tan}.$

MOMENTO O TORQUE (τ)



Torca, torque, momento de torsión o *simplemente* ***momento de una fuerza:*** medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para provocar o modificar el movimiento de rotación de un cuerpo.

Se define el torque de la fuerza **F**, que se aplica en el punto P, respecto al punto O como el producto vectorial del vector **r** (que va desde O a P) por la fuerza **F**.

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

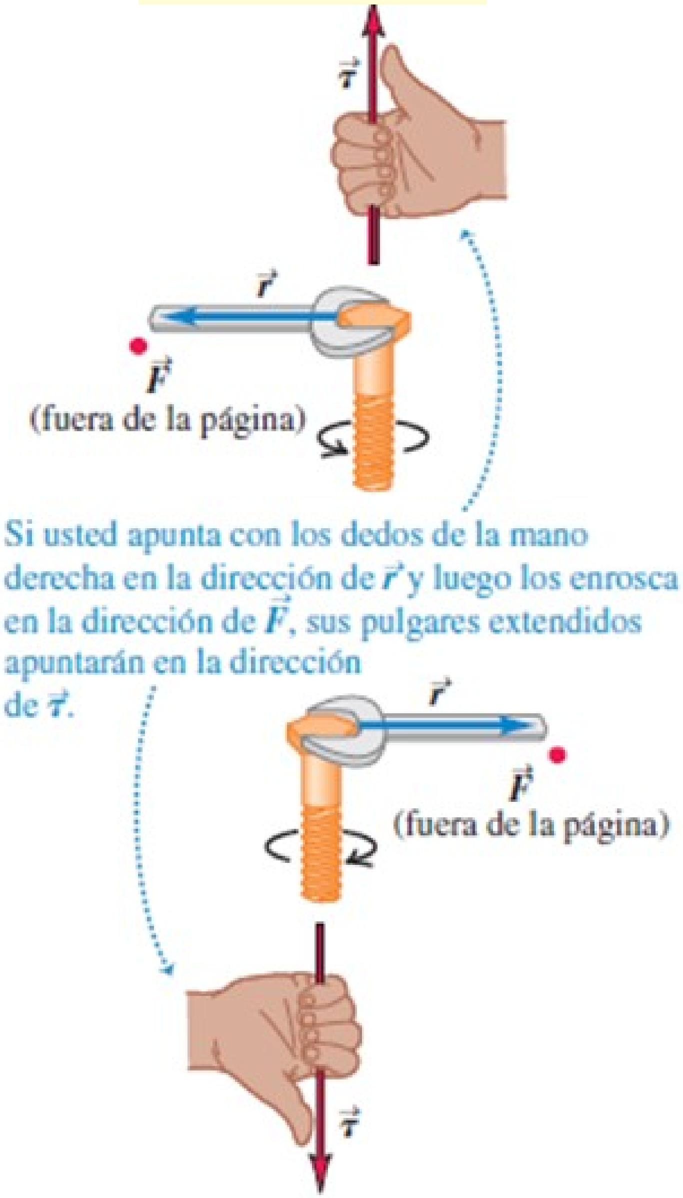
El módulo del torque vale:

$$\tau = r.F sen\ \theta$$

La magnitud , dirección y punto de aplicación de la fuerza son importantes para provocar la rotación.

MOMENTO O TORQUE (τ)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Los torques pueden provocar rotación en cualquier *sentido (antihorario u horario).*

Se debe **elegir un sentido de giro positivo**. Habitualmente se elige que los ***torques en sentido antihorario son positivos.***

La **unidad del SI del torque es el newton-metro**.
Como el torque *no es trabajo ni* energía se expresa en newton-metros, *no en joules.*

Vectores perpendiculares al plano
(x) entrante al plano
(•) saliente al plano

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Dos condiciones de equilibrio: Condiciones necesarias y suficientes.

$$\sum \overline{F} = 0$$

$$\sum \overline{\tau} = 0$$ Alrededor de cualquier punto

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

Situaciones en las que un cuerpo rígido está en reposo (sin traslación ni rotación): **equilibrio estático**.

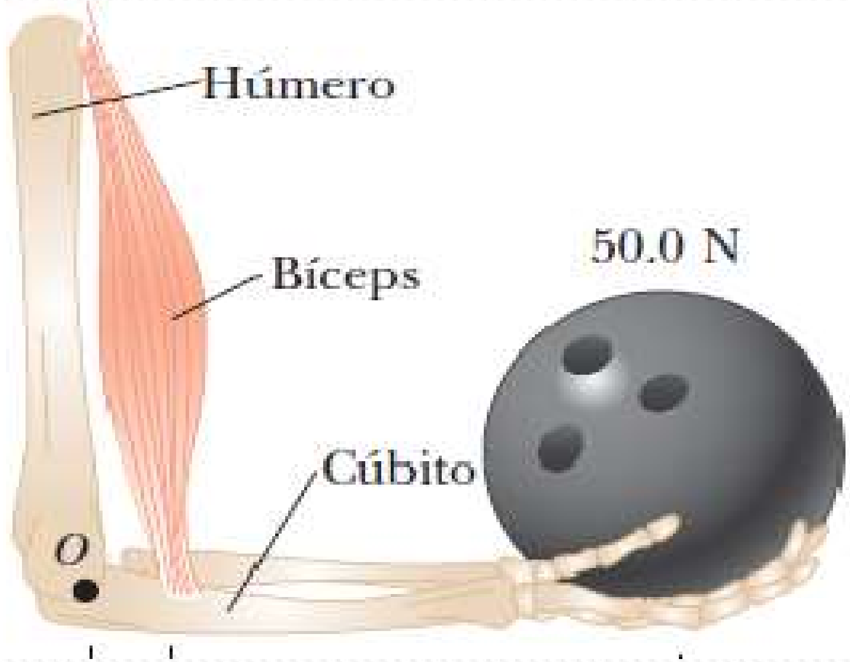
Las mismas condiciones son válidas para un cuerpo rígido con movimiento de *traslación* uniforme (sin rotación).

1) **La suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el rígido es cero.**
2) **la suma de los torques con respecto a cualquier punto debe ser cero**.

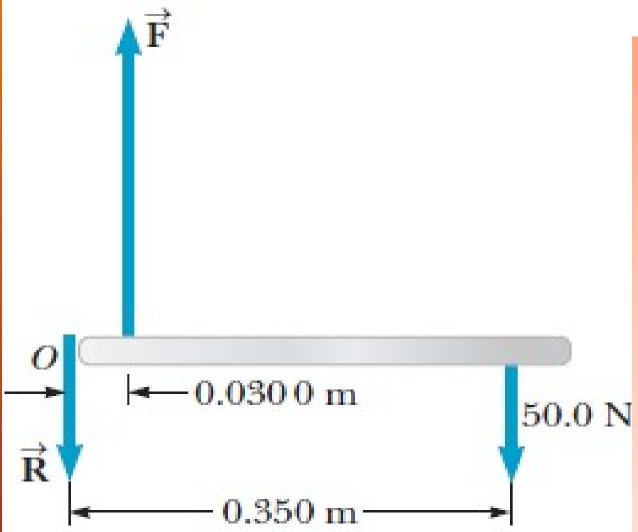
Centro de gravedad (C.G): Punto *en el cual se puede considerar aplicado el peso w del cuerpo, de modo que* el torque con respecto a cualquier punto producido por el peso así aplicado, es el mismo que el efecto que produce el peso distribuido en todo el cuerpo.

Ejercicio 3.10

Una bola de boliche de 50,0 N se sostiene en la mano de una persona con el antebrazo en posición horizontal, como se muestra en la figura. El músculo del bíceps se une a 30,0 mm del empalme y la bola está a 35,0 cm de éste. Encuentre la fuerza ascendente **F** ejercida por el bíceps sobre el antebrazo (el cúbito) y la fuerza hacia abajo **R** ejercida por el húmero sobre el ante brazo, actuando en el empalme. Desprecie el peso del antebrazo y la leve desviación de la vertical del bíceps.



Empecemos haciendo el D.C.L. de la situación:



Las fuerzas que actúan sobre el antebrazo son equivalentes a las que actuarían sobre una barra de longitud 0,350 m, como se muestra:

Elijo las coordenadas *x y y de manera usual como se muestra y el eje en O en el extremo izquierdo, y uso* las condiciones de equilibrio para establecer ecuaciones que involucren a las incógnitas F y R.

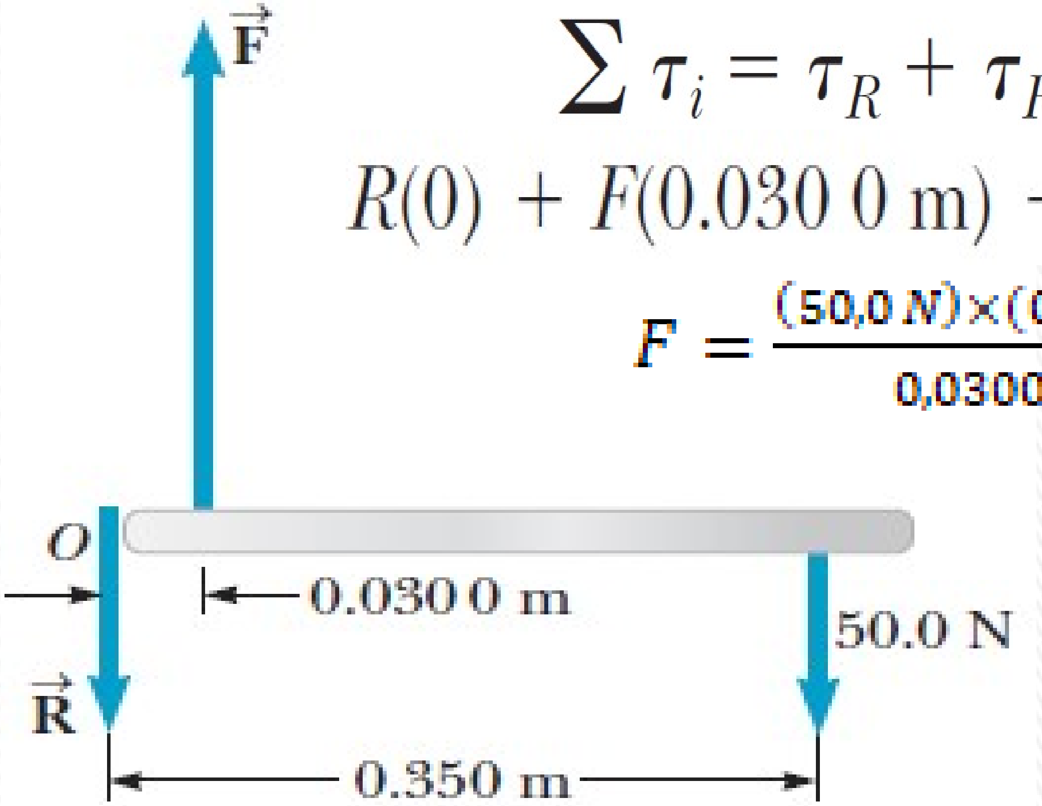
La sumatoria de los torques respecto a cualquier punto debe ser cero, por lo que elijo respecto al punto O.

Ejercicio 3.10

$$\sum \tau_i = \tau_R + \tau_F + \tau_{BB} = 0$$

$$R(0) + F(0.030\,0\text{ m}) - (50.0\text{ N})(0.350\text{ m}) = 0$$

$$F = \frac{(50,0\,N)\times(0,350\,m)}{0,0300\,m} = 583,33\,N$$



$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R + F - 50,0\,N = 0$$

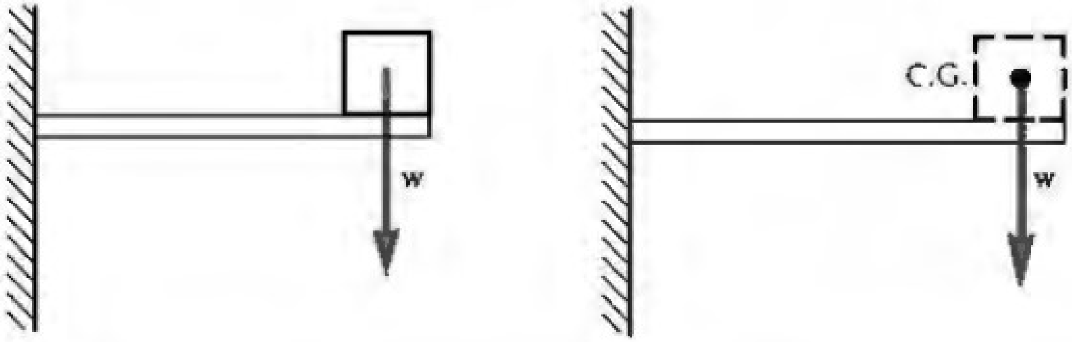
$$R = F - 50,0\,N = 583,33 - 50,0 = 533,33\,N$$

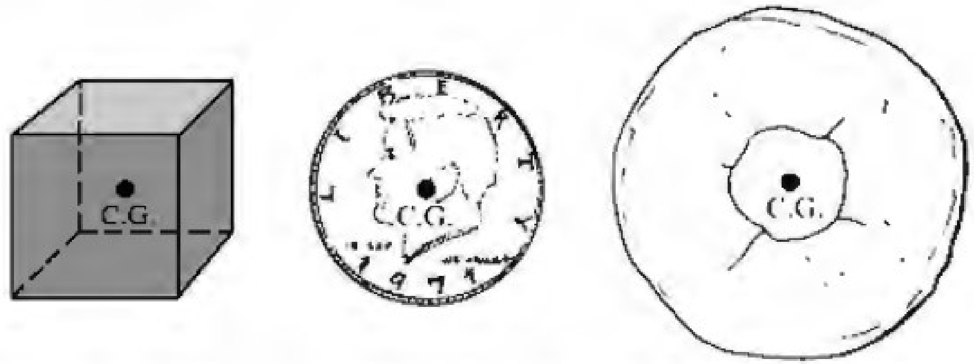
F= 583 N R= 533 N

CENTRO DE GRAVEDAD (C.G.)

El torque con respecto a cualquier punto producido por el peso de un objeto extenso es igual al que produciría un objeto puntual con su mismo peso y situado en un punto llamado ***centro de gravedad (C.G.) o baricentro.***

Es decir que el C.G. representa el punto donde se puede considerar concentrado todo el peso



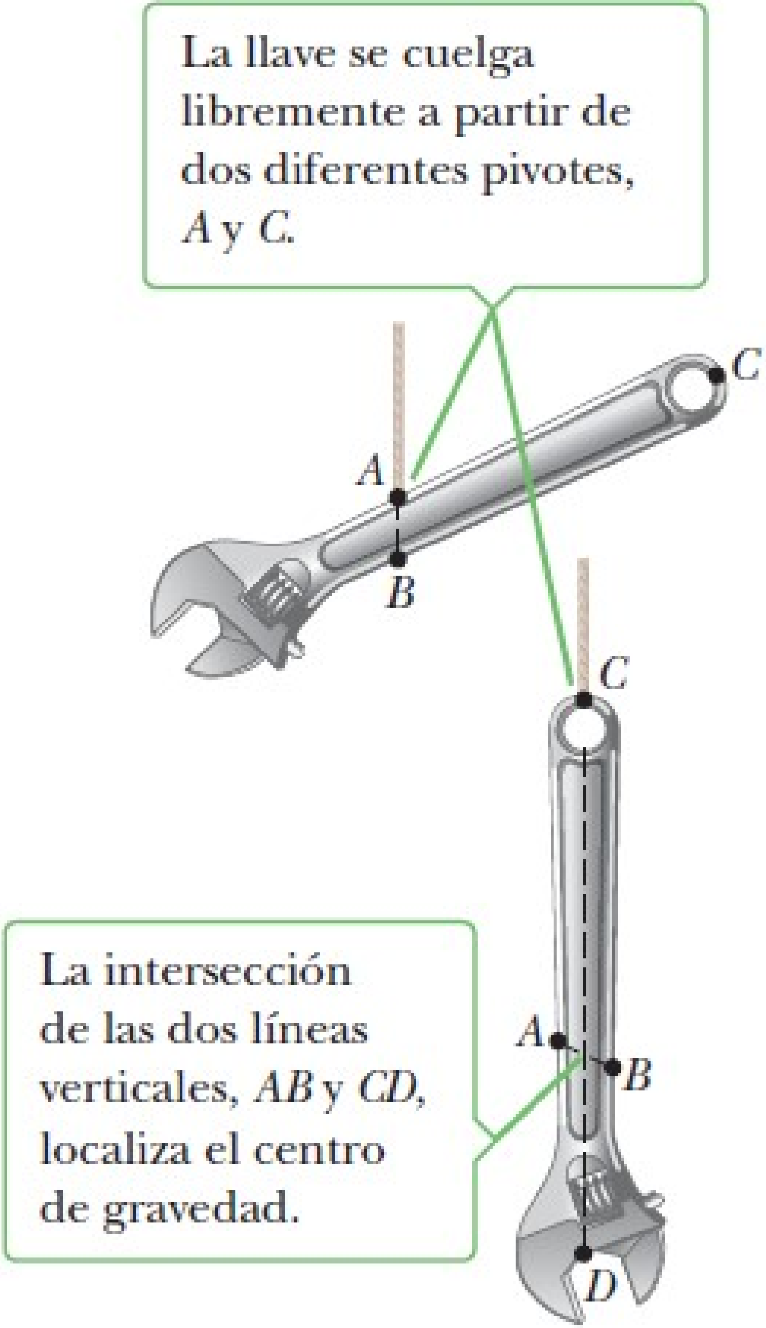


Los C.G. de objetos simétricos y densidad uniforme coinciden con sus centros geométricos.
Para objetos no simétricos, el C.G. puede calcularse matemáticamente o localizarse experimentalmente.

Un objeto suspendido siempre cuelga de manera que su C.G. se encuentra directamente por debajo del punto de suspensión, ya que en esta posición el torque que resulta del peso con respecto a ese punto es cero.
Esta observación proporciona una manera de localizar el C.G. experimentalmente.

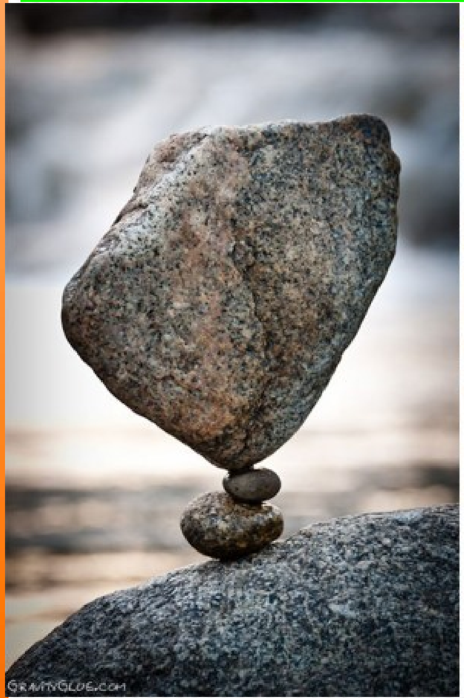
CENTRO DE GRAVEDAD

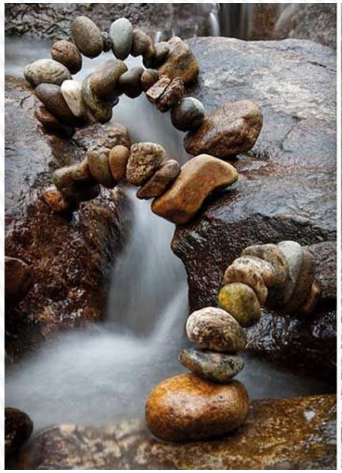
Una técnica experimental para determinar el centro de gravedad de una llave.



Este soporte de una botella de vino es una sorprendente muestra de equilibrio estático.

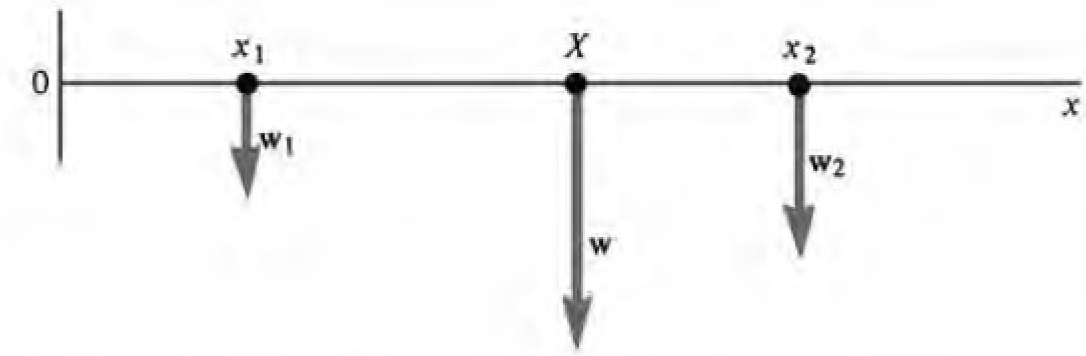
CENTRO DE GRAVEDAD





CENTRO DE GRAVEDAD

Vamos a encontrar analíticamente el C.G. de un sistema muy simple: dos masas puntuales en los extremos de una barra sin peso dirigida a lo largo del eje *x.*



El C.G. es un punto desconocido *X.*
A partir de la definición, un peso $w = w_1 + w_2$, concentrado en el punto *X producirá un torque* igual a la suma de los torques debidos a w_1 y w_2.

El momento de cada uno de ellos respecto al origen es $\tau_1 = -x_1.w_1$ y $\tau_2 = -x_2.w_2$.
El torque total respecto a O vale:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -x_1.w_1 - x_2.w_2$$

Un solo peso *w* en el punto *X* produce un torque $\tau = -Xw$.
Igualando ambas expresiones parar encontramos que el C.G. está situado en:

$$X = \frac{-x_1.w_1 - x_2.w_2}{-w} = \frac{x_1.w_1 + x_2.w_2}{w_1 + w_2}$$

Si hay más de dos pesos, el C.G. se encuentra de la misma manera:

$$X = \frac{x_1.w_1 + x_2.w_2 + x_3.w_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} = \frac{\sum_i x_i.w_i}{\sum_i w_i}$$

CENTRO DE GRAVEDAD

La ecuación anterior del centro de gravedad contiene los pesos tanto en el numerador como en el denominador. Si sustituimos $w_i = m_i g$ *para cada peso, los factores g se anulan (suponiendo que el valor de g no varía).*

Entonces, *X se expresa en función de las masas en* vez de en función de los pesos y se denomina ***centro de masas (C.M.)****).*

No hay diferencia entre el C.G. y el C.M. mientras **g tenga la misma dirección y módulo para** cada peso.

El procedimiento para hallar el centro de gravedad de configuraciones más complicadas es básicamente el mismo. Si los pesos se hallan en diversos puntos en un plano, entonces el C.G. se encuentra en un punto *(X. Y.) del plano.*

Usamos la ecuación anterior para hallar *X y una ecuación análoga para* las coordenadas *y de los pesos se emplea para obtener Y.*

$$X = \frac{x_1.w_1 + x_2.w_2 + x_3.w_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} = \frac{\sum_i x_i.w_i}{\sum_i w_i}$$

$$Y = \frac{y_1.w_1 + y_2.w_2 + y_3.w_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} = \frac{\sum_i y_i.w_i}{\sum_i w_i}$$

TIPOS DE EQUILIBRIO

Un equilibrio se dice que es **estable** si, al perturbarlo, por sí mismo, vuelve al punto anterior de estabilidad. Un péndulo es un buen ejemplo. Aunque lo alteremos tantas veces como queramos, siempre retomará la posición inicial, la vertical.

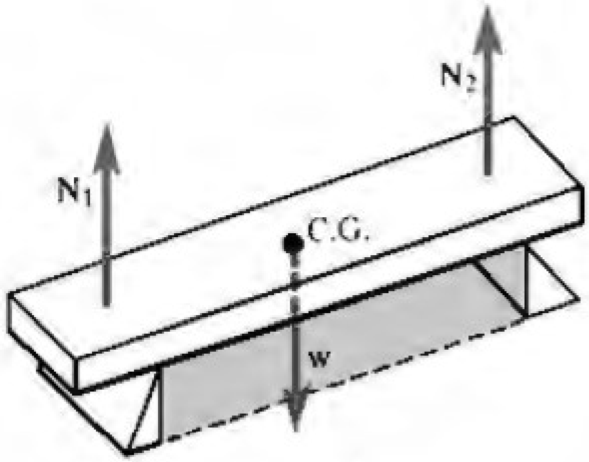
Un equilibrio se dice que es **inestable** si, al perturbarlo, el objeto se aleja de su posición inicial. Ejemplo, una bolita sobre el polo de una esfera. Una vez apartada, no regresa, se aleja del punto de equilibrio.

Un equilibrio se dice que es **indiferente** si, al perturbarlo, no modifica su estado, es decir accede a un nuevo punto de equilibrio. Un libro caído en el suelo es un buen ejemplo. La típica expresión *"de ahí no pasa"*, cuando algo se nos cae al suelo, define de forma gráfica la situación. Es indiferente a lo que le hagamos.

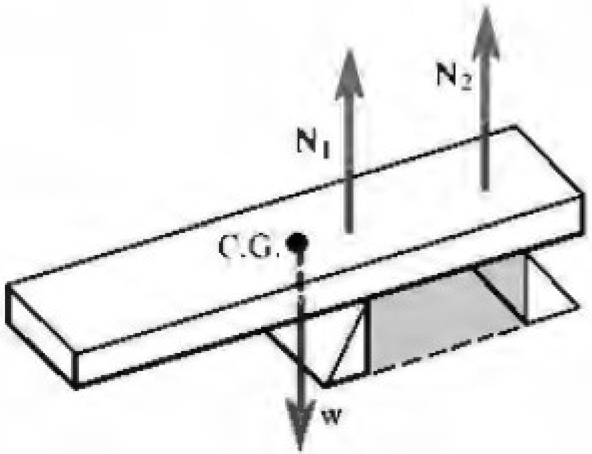
ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO

El número y posición de las patas de un animal quedan determinados parcialmente, según sus necesidades de estabilidad y de equilibrio.
La idea básica se ilustra mediante el tablón de la figura.

Si su C.G. se halla entre los soportes, los torques en torno al C.G. debidos a $\mathbf{N_1}$ y a $\mathbf{N_2}$ son opuestos y se anulan, y por lo tanto el tablón se halla en equilibrio.

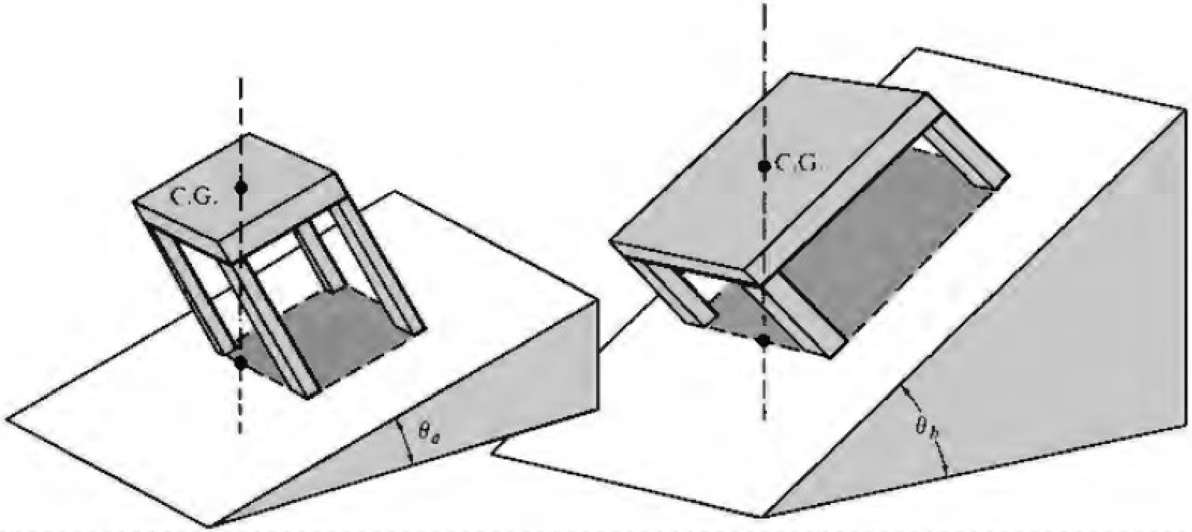


Sin embargo, cuando el centro de gravedad se halla a la izquierda de ambos soportes, los torques de $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$ con respecto al C.G. son ambos positivos.
Como el torque neto no es nulo, el tablón se cae.
Así, **un objeto se halla en equilibrio sólo cuando *su centro de gravedad se halla por encima del área de la base definida* por sus soportes.**



Un animal que se sostiene sobre cuatro patas es análogo a una mesa.
Una mesa colocada sobre una superficie que se vaya inclinando gradualmente, acaba por caerse cuando su centro de gravedad ya no se halla sobre la superficie delimitada por los extremos de sus cuatro patas.

ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO

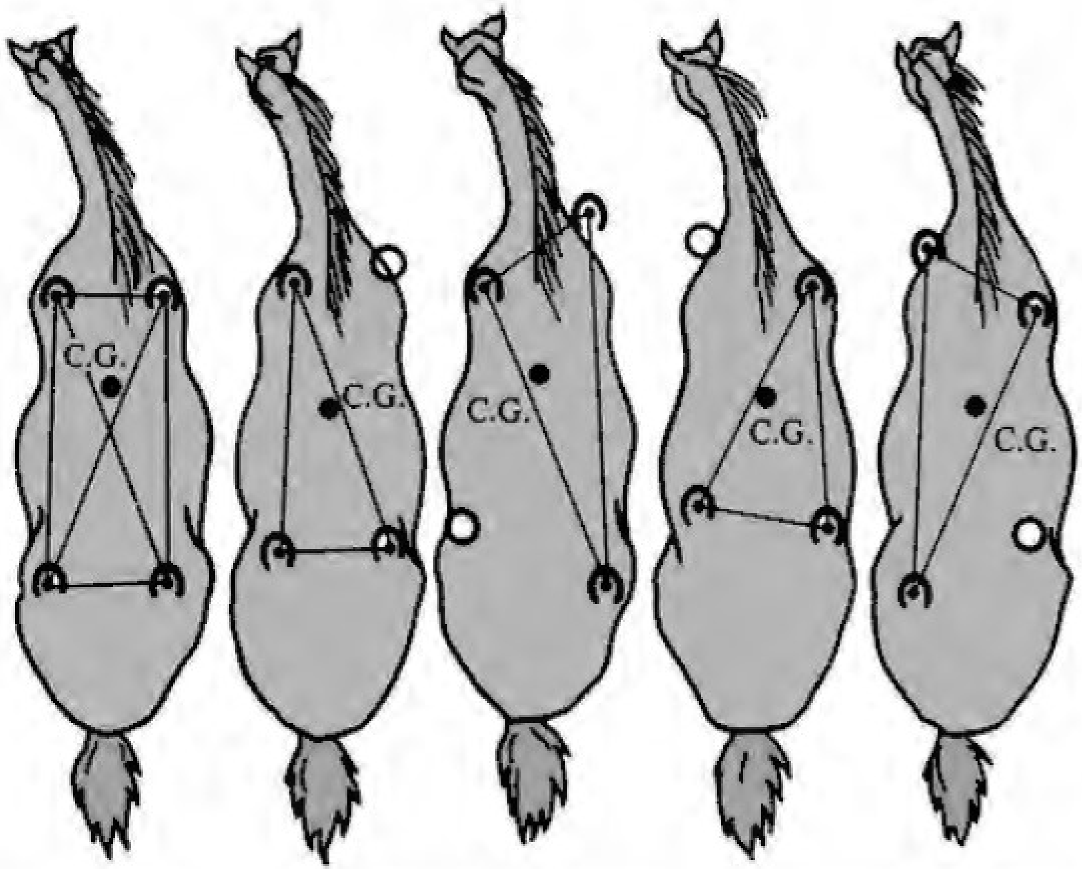


Cuanto más cortas sean las patas para una mesa de forma determinada, mayor será el ángulo θ *en que esto ocurra y mayor será su estabilidad;* una mesa baja es más estable que una mesa alta.

Análogamente, el C.G. de los automóviles, barcos y vasijas ha de mantenerse lo más bajo posible para asegurar la máxima estabilidad.
Se observa que las ratas y ardillas, cuyas piernas son relativamente cortas, están bien adaptadas para vivir en terrenos escarpados o en las ramas de los árboles.
En cambio, el caballo y el antílope, cuyas patas son largas, se encuentran bien dispuestos para ser eficaces en la carrera sobre terrenos casi planos.

Si un cuadrúpedo levanta una pata, permanecerá en equilibrio si su C.G. se encuentra por encima del área triangular de la base delimitada por las tres patas restantes.
Moviendo las patas en el orden correcto, puede andar lentamente manteniendo siempre tres patas en contacto con el suelo, y con el C.M. por encima del triángulo definido por ellas.

ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO



El orden es: delantera derecha, trasera izquierda, delantera izquierda, trasera derecha.

Es el que siguen todos los animales cuadrúpedos y los niños cuando gatean.

Los seres humanos, los pájaros y algunos animales pueden mantenerse en equilibrio sobre uno o dos pies, pero ello ocurre gracias a que sus pies son suficientemente anchos como para permitírselo.

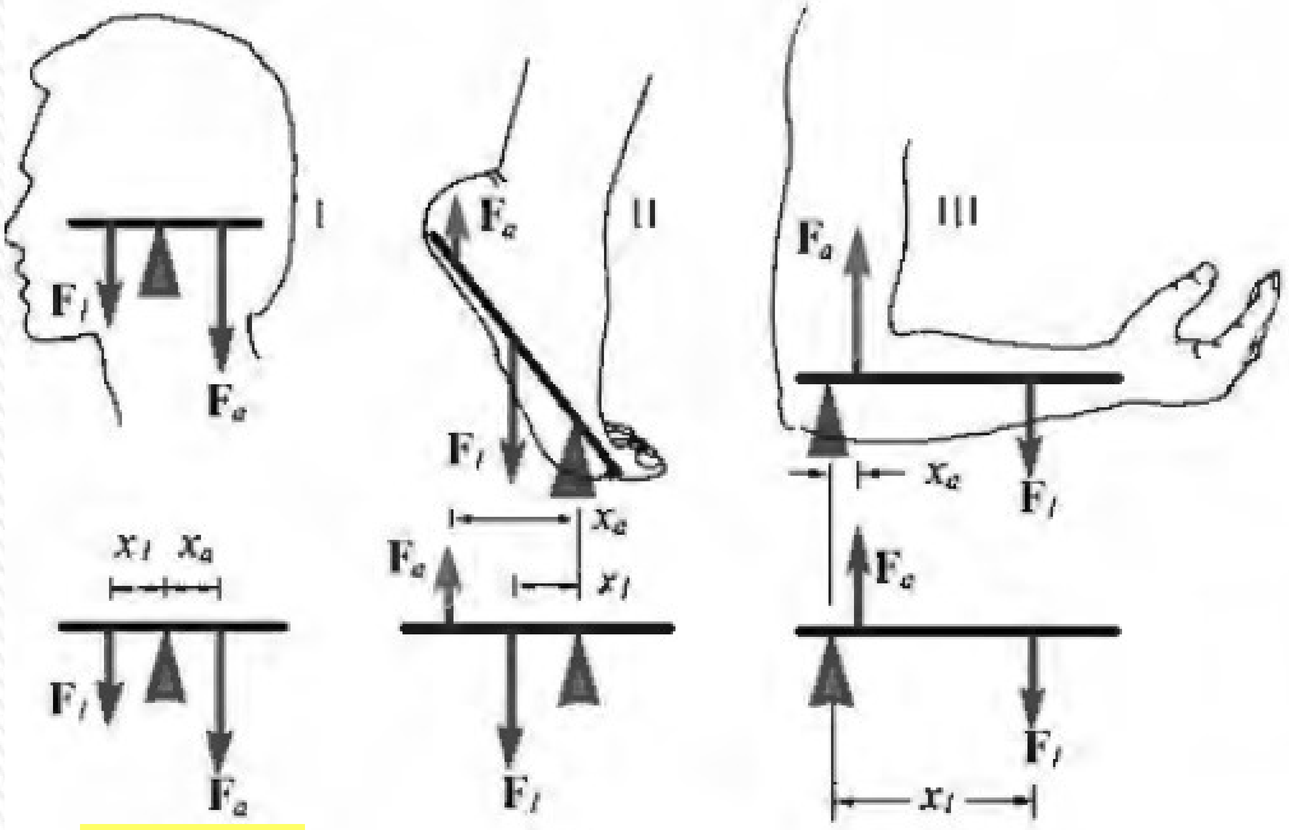
PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

Máquinas simples: palancas y sistemas de poleas.

En cada caso, se aplica una fuerza F_a. y se contrarresta una fuerza de carga F_L.

La ***ventaja mecánica (V.M.) de la máquina*** *se define como el cociente* de los módulos de estas fuerzas

$$V.M. = \frac{F_L}{F_a}$$



Clase I

Clase II

Clase III

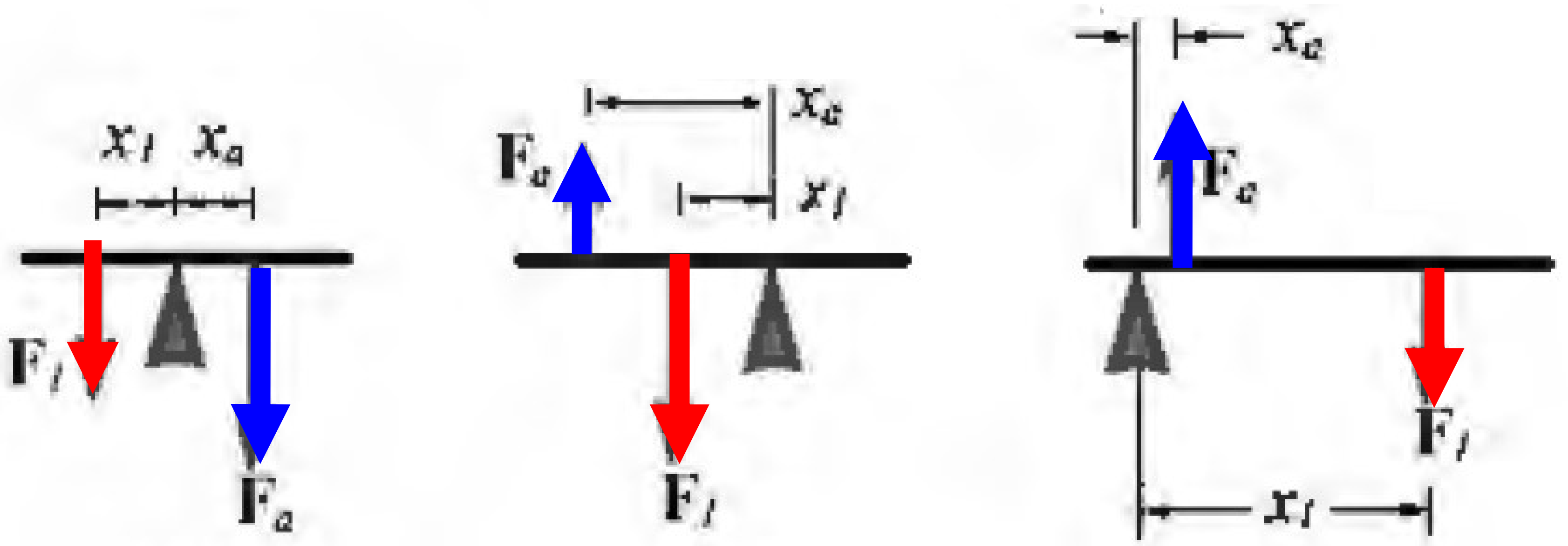
Una palanca es en esencia una barra rígida utilizada con un punto de apoyo (fulcro).

Según las posiciones relativas de ***F_L, F_a y el fulcro , se definen tres clases* de palanca**.

PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

La ventaja mecánica en todas las clases de palancas se puede expresar como un cociente de distancias a partir del fulcro.
Si las fuerzas son perpendiculares a la palanca, la razón de la fuerza de carga y aplicada en equilibrio es:

$$V.M. = \frac{F_L}{F_a} = \frac{x_a}{x_L}$$



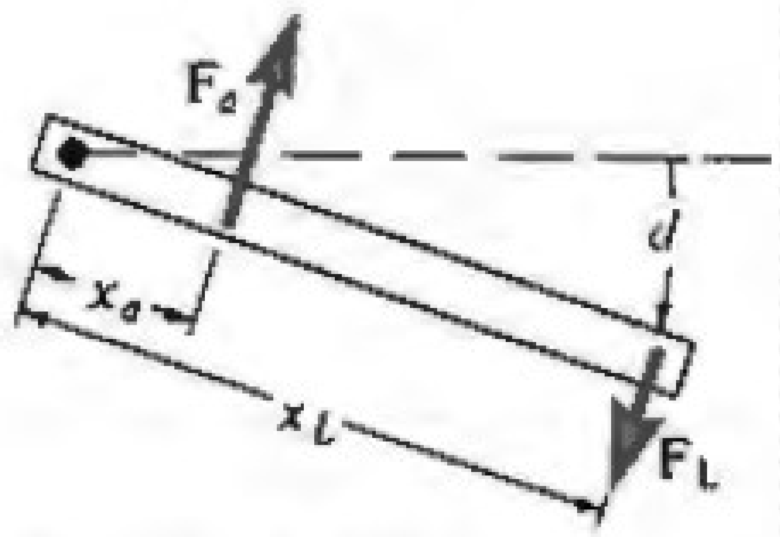
Se debe considerar la fuerza o componente perpendicular a la palanca.
Ventajas mecánicas de las palancas: **clase III es siempre menor que 1, clase II es siempre mayor que 1 y de clase I pueden ser mayor o menor que 1** .
La **ventaja mecánica V.M.** dada por la ecuación anterior es un valor ideal.
Las máquinas reales siempre tienen fuerzas de rozamiento que reducen la ventaja mecánica real por debajo de su valor ideal.

PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

Las extremidades se pueden modelar como palancas tipo III.

Las extremidades cortas con pequeños valores de x_L *tendrán V.M.* relativamente grandes y serán capaces de ejercer grandes fuerzas.

Sin embargo, la distancia que recorre el extremo de un miembro es proporcional a su longitud x_L *por lo que el movimiento* rápido requiere extremidades largas.



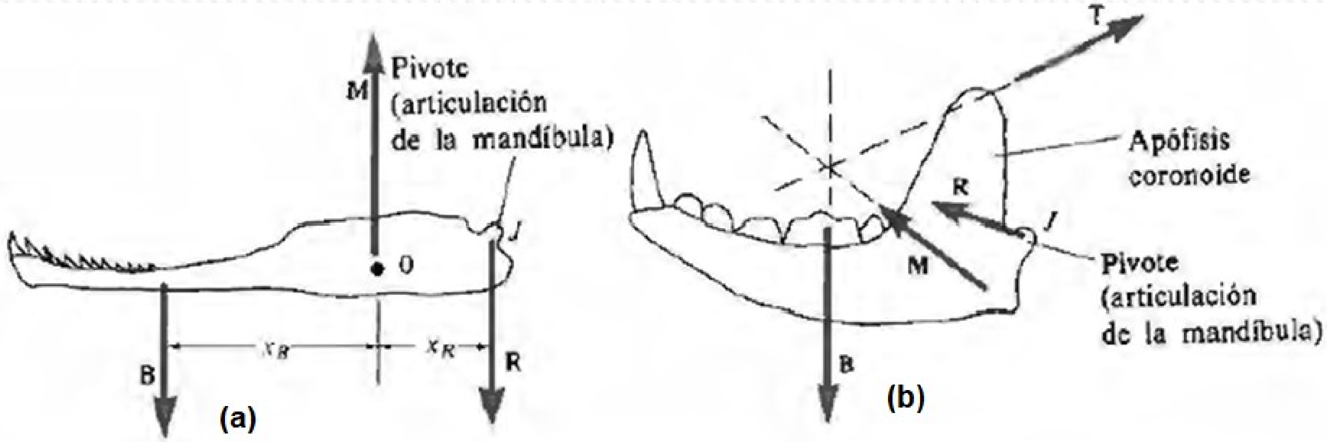
Hay un compromiso entre la fuerza y la velocidad de movimiento.

La pata delantera de un caballo de carreras tiene una ventaja mecánica de 0,08.

El armadillo, que es un animal zapador, tiene una pata delantera cuya ventaja mecánica es 0,25. Por lo tanto, aunque no puede moverse con tanta velocidad, tiene la fuerza suficiente para excavar.

Las mandíbulas de los animales

Un animal debe poder morder con fuerza: esto depende del módulo, dirección y punto de aplicación de las fuerzas ejercidas por los músculos que cierran la mandíbula. Además, los huesos de la articulación *de la mandíbula superior con la inferior* deben ser lo suficientemente resistentes a fin de evitar fracturas y dislocaciones.
Sabemos que los mamíferos han evolucionado a partir de reptiles de modo que los músculos implantados en la mandíbula inferior iban *creciendo progresivamente, mientras que los huesos de* la articulación iban *disminuyendo de tamaño, lo que se* explica en términos de los cambios de dirección y de punto de aplicación de las fuerzas musculares.

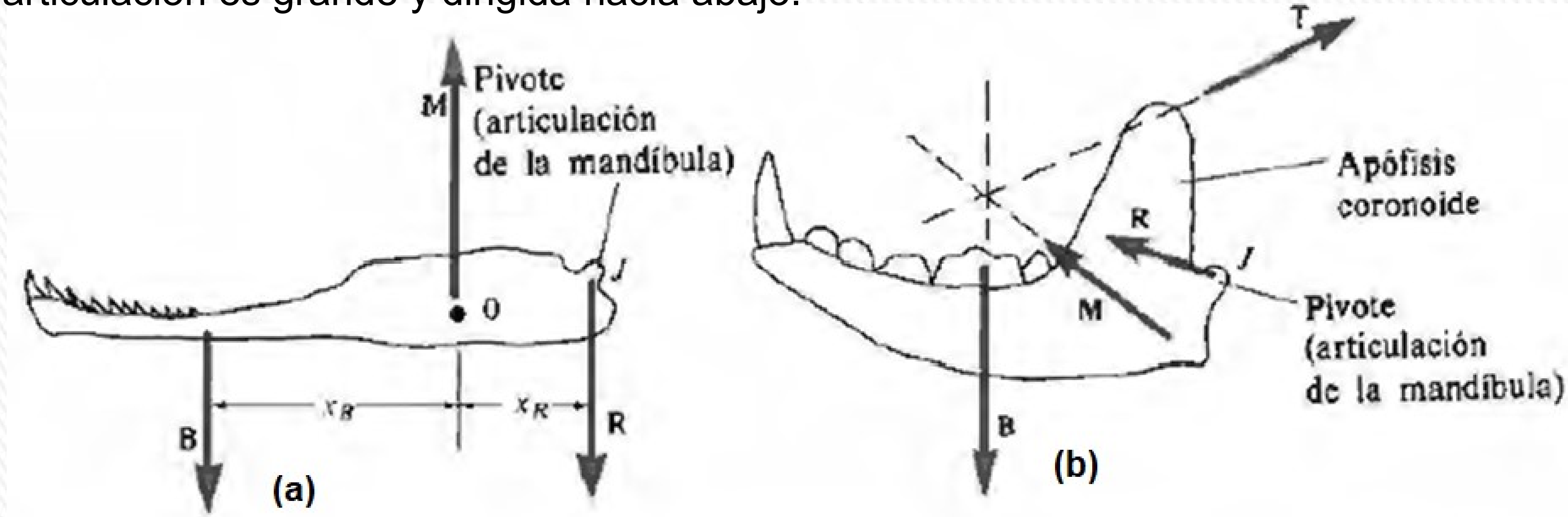


Diferencias básicas entre la mandíbula inferior de un reptil primitivo y el típico aspecto de un mamífero actual.

En el reptil es una simple barra con unos músculos que empujan hacia arriba, implantados en un punto cercano a la articulación.
La mandíbula de los mamíferos tiene una gran protuberancia llamada ***apófisis coronoides,*** *en la cual se implanta* el **músculo *temporal*** *que* empuja hacia *atrás y hacia arriba* ***(fuerza T).***
El ***masetero*** *y el* ***pterygoides*** *empujan hacia adelante* y hacia arriba (fuerza **M).**

Las mandíbulas de los animales

Un reptil primitivo que muerde con una fuerza dirigida hacia arriba -**B** la comida situada entre sus dientes posteriores experimenta una reacción igual pero opuesta **B sobre su mandíbula.** Como la fuerza muscular **M** se aplica cerca de la articulación, se puede alcanzar el equilibrio estático sólo si la **fuerza R** ejercida sobre la articulación es grande y dirigida hacia abajo.

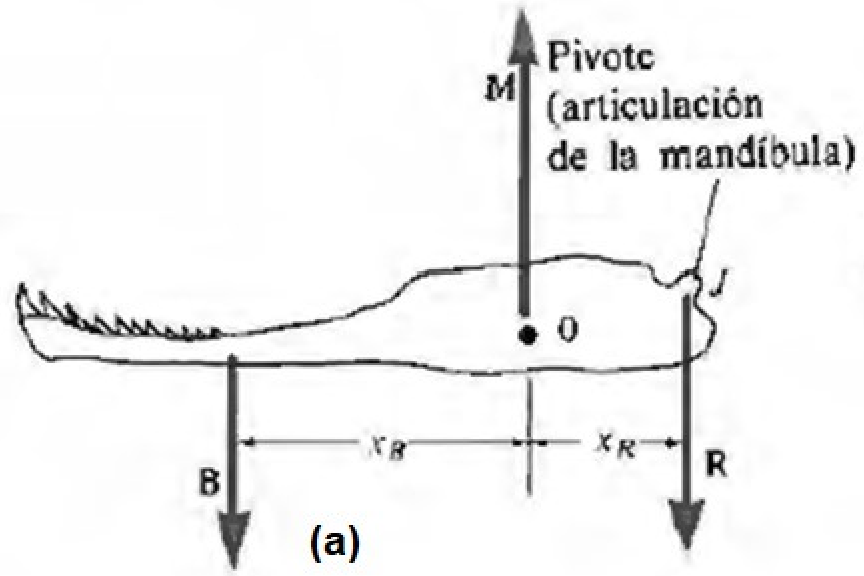


(a) **Mandíbula inferior de un reptil primitivo. M** es la fuerza debida al músculo. **B** es la fuerza de reacción que presenta el objeto que está siendo mordido y **R** es la fuerza debida a la articulación de la mandíbula en *J.*

(b) Mandíbula de mamífero*. Las fuerzas musculares son **T** y **M.*** La fuerza **R** debida a la articulación de la mandíbula puede ser nula si las líneas de acción de las tres fuerzas **T**, **B** y **M** se cortan de la manera que se muestra aquí.

Las mandíbulas de los animales

Para el reptil: calculando los momentos con respecto al punto O, el momento neto es cero si



$$x_B . B - x_R . R = 0 \quad \Rightarrow R = \frac{x_B}{x_R} B$$

Como la fuerza neta sobre la mandíbula debe ser cero, *M – B – R = 0, la fuerza muscular requerida es*

$$M = B + R = B\left(1 + \frac{x_B}{x_R}\right)$$

Por ejemplo, si x_B = $2x_R$ *y B = 1 N, entonces R = 2 N* y *M= 3 N.*
Así pues, la fuerza B sobre la comida es.menor que las fuerzas *M y R ejercidas por el músculo y* la articulación, respectivamente.
Se ve claramente que la solidez de la articulación es un factor que limita la fuerza con que puede morder el reptil y el margen de seguridad del músculo.