Facultad de Ciencias.
Centro de Matemática.
Matemática Discreta. 2023

Repartido 5: Combinatoria.

1. Sean A un conjunto con 10 elementos y B uno con 15.
   a) ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ existen?
   b) ¿Cuántas de las anteriores son inyectivas?
   c) ¿Cuántas **palabras** (familias ordenadas y con posibles repeticiones) de 10 elementos pueden formarse a partir de elementos de B?
   d) ¿Cuántas de estas listas no tienen repeticiones?
   e) ¿Cuántos subconjuntos tiene A?
   f) ¿Cuántos de ellos tienen 10 elementos?
2. ¿Cuántas elementos tiene el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ si A tiene k elementos?
3. ¿Cuántas relaciones existen de un conjunto de k elementos a otro de n?
4. Sea A un conjunto con n elementos. Notamos
   - C_k^n o $\binom{n}{k}$ a la cantidad de subconjuntos de A con k elementos y llamamos a este número *combinaciones de* n *en* k.
   - AR_k^n a la cantidad de listas de k elementos de A y llamamos a este número *arreglos con repetición de* n *en* k.
   - A_k^n a la cantidad de listas sin repetición de k elementos de A y llamamos a este número *arreglos de* n *en* k.

   Las partes (a) a (d) deben resolverse de manera combinatoria, o sea contando, o sea sin usar fórmulas para las expresiones de arriba.

   a) Calcular las cantidades de arriba para $k = 0, 1, n-1, n$.
   b) Comparar C_k^n y C_{n-k}^n.
   c) Observar que los arreglos con y sin repetición miden ciertas cantidades de funciones de un conjunto con k elementos en uno con n elementos.
   d) Expresar 2^n como suma de combinaciones de n en algo.
   e) Dar fórmulas para C_k^n, A_k^n, AR_k^n en función de n y k (ya vimos esto en clase).
5. Fórmula de Stiefel y Teorema del binomio
   a) Demostrar (de manera combinatoria y de manera algebraica) que

   $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

   (esto se llama **fórmula de Stiefel**).
   Notar que sabemos calcular el número en n, k recurriendo a casos anteriores -n', k', con $n' < n, k' \leq k$.)
   b) Escribir las primeras seis líneas del triángulo de Pascal.
   c) Desarrollar $(x+y)^2, (x+y)^3$.
   d) Generalizar a $(x+y)^n$ (esto se llama **Teorema del binomio**)

6. *a*) ¿Cuántos números naturales de tres dígitos distintos existen?
   b) ¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos distintos existen?

7. *a*) Hallar la cantidad de palabras que pueden obtenerse permutando las letras de

   `MUSICA`

   b) ¿Cuántas de ellas empiezan con una vocal?
   c) ¿Cuántas de ellas empiezan o terminan con una vocal?
   d) ¿Cuántas de ellas tienen todas las letras en un lugar distinto al original?
   e) ¿Cuántas de ellas incluyen la palabra MAS?

8. *a*) Hallar la cantidad de palabras que pueden obtenerse permutando las letras de

   `MATEMATICA`

   b) ¿Y si la primera letra debe ser `E`?
   c) ¿Cuántas de ellas incluyen la palabra MATE?

9. Contar la cantidad $Sob(k, n)$ de funciones sobreyectivas de un conjunto de k elementos a uno de n.

10. Una permutación de n es una biyección $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$. Al conjunto de permutaciones de n se le nota S_n.

    a) Calcular el cardinal de S_n, que notaremos P_n y llamaremos **permutaciones de** n.
    b) Hallar las permutaciones de n que dejan fijo al elemento 1.
    c) Un desorden de n es una permutación de n que no deja fijo ningún elemento. Notamos D_n al conjunto de desórdenes de n y d_n a su cardinal. Hallar d_n.

11. Calcule cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

    a) Ningún dígito está en su posición original.
    b) Los pares no están en su posición original.
    c) Los pares no están en su posición natural y la secuencia debe empezar con los dígitos 1, 2, 3, 4 en algún orden.

12. ¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

13. Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuántas formas se puede hacer una selección si:

    a) No hay restricciones.
    b) Debe haber 5 hombres y 5 mujeres.
    c) Debe haber un número par de mujeres.
    d) Debe haber más mujeres que hombres.
    e) Debe haber al menos 6 hombres.

14. De cuántas formas se puede elegir 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

a) Cinco cartas del mismo palo.

b) Cuatro ases.

c) Cuatro cartas del mismo valor.

d) Tres ases y dos sotas.

e) Tres ases y un par.

15. *a*) ¿De cuántas maneras se puede partir un conjunto de 6 elementos en tres subconjuntos de cardinal $3, 2$ y 1 respectivamente? ¿Y en tres subconjuntos de cardinal 2?

    b) ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos, en n conjuntos de 2 elementos?

16. ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego del domino?