Teoría Electromagnética
Curso 2023

Práctico 4
Leyes de conservación

1. a) Muestre que el tensor de tensiones de Maxwell para un problema electrostático tiene un eje principal según el campo eléctrico $\vec{E}$ y otros dos ejes principales en el plano normal a $\vec{E}$. Muestre que en esos ejes:

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pista: resuelva el problema de autovalores $\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$.

b) Partiendo del tensor de tensiones de Maxwell, determine la densidad de flujo de momento a través de una superficie si:

i) la normal es paralela a campo $\vec{E}$.

ii) La normal es perpendicular al campo $\vec{E}$.

2. Considere un capacitor formado por dos placas paralelas infinitas con la placa inferior en $z = -d/2$ y densidad de carga $-\sigma$ y la superior en $z = d/2$ y densidad de carga σ.

a) Determine el tensor de tensiones de Maxwell para puntos entre las placas.

b) Calcule la fuerza por unidad de área en la placa superior a partir de a).

c) Calcule la cantidad de movimiento por unidad de área y por unidad de tiempo que atraviesa el plano $z = 0$.

d) A partir de la cantidad de movimiento que absorben las placas, calcule nuevamente la fuerza por unidad de área.

3. Considere los siguientes problemas que involucran esferas. En todos ellos llamemos hemisferio superior al que se identifica con la coordenada $\theta < \frac{\pi}{2}$ en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) centradas en el centro de la esfera e inferior cuando $\theta > \frac{\pi}{2}$. Llamemos $\hat{z}$ a la dirección con respecto a la cual se mide θ.

a) Determine la fuerza sobre el hemisferio superior de una esfera sólida uniformemente cargada usando el tensor de tensiones de Maxwell.

b) Determine la fuerza electrostática sobre el hemisferio superior de una esfera conductora aislada y sometida a campo eléctrico externo uniforme $E_0\hat{z}$.

c) Determine la fuerza de atracción magnética entre el hemisferio superior e inferior de una cáscara esférica de radio R con densidad de carga superficial uniforme σ, que gira en torno a su centro con velocidad angular $\omega\hat{z}$.

4. Considere una cáscara cilíndrica infinita de radio a, por la que circula una corriente I uniformemente distribuida y paralela a su eje. Calcule la fuerza electromagnética por unidad de área sobre la cáscara.

5. Partiendo de la ley de conservación para la cantidad de movimiento, demuestre que:

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\vec{L}_{mec} + \vec{L}_{em}\right) dV + \int_S \hat{n}\cdot\overleftrightarrow{M}\, da = 0$$

donde $\vec{L}_{mec} = \vec{r}\times\vec{P}_{mec}$, $\vec{L}_{em} = \vec{r}\times\vec{P}_{em}$ son el momento angular mecánico y el momento angular electromagnético y $\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{T}\times\vec{r}$ es la densidad de flujo de momento angular.

Nota: $\left(\hat{n}\cdot\overleftrightarrow{M}\right)_j = \sum_i n_i M_{ij}$ y $\left(\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}\right)_{ij} = \sum_{k,l}\epsilon_{jkl}\, T_{ik}\, r_l$.

6. Considere un solenoide largo de radio R, n vueltas por unidad de longitud y corriente I, y dos superficies cilíndricas coaxiales con el solenoide, de longitud l. Una de estas superficies cilíndricas, de radio $a < R$ y masa m_a está dentro del solenoide con una carga Q uniformemente distribuida, mientras que la otra (de radio $b > R$ y masa m_b) esta fuera del solenoide con una carga $-Q$, también uniformemente distribuida.

a) Calcule el momento angular del campo electromagnético respecto al eje.

b) La corriente se disminuye gradualmente hasta cero, y los cilindros comienzan a rotar respecto de su eje. Calcule el momento angular ganado por los cilindros asumiendo que la velocidad angular del cilindro interior (ω_a) y la del cilindro exterior (ω_b) se relacionan mediante $\omega_b = -k\omega_a$ con k una constante.

c) Calcule el torque respecto al eje sobre ambos cilindros asumiendo que la corriente $I(t)$ es conocida y que cambia lentamente. Deduzca el valor de la constante k de la parte anterior.

7. Se considera una esfera de hierro de radio R con carga Q y magnetización uniforme $\vec{M} = M_0\hat{z}$. La esfera está inicialmente en reposo.

a) Calcule el momento angular total $\vec{L}_{em}$ del campo electromagnético en todo el espacio.

b) Suponga que la esfera es desmagnetizada gradual y uniformemente. Calcule el campo eléctrico inducido, el momento (o torque) que éste ejerce sobre la esfera y de ahí el momento angular total ganado por la esfera durante el proceso. Compare con el resultado obtenido en a) y comente.

8. Considere un modelo del electrón como un cascarón esférico uniformemente cargado con carga e y radio R girando con velocidad angular ω respecto a su centro.

a) Calcule la energía total del campo electromagnético.

b) Calcule el momento angular total del campo electromagnético respecto al centro.

c) Suponga que la masa del electrón es de origen electromagnético en su totalidad

$$m_e c^2 = U_{em}$$

y que esto también es cierto para su momento angular $L = \hbar/2$. Determine el radio, la velocidad angular del electrón y su producto.

d) ¿Le parece un modelo razonable? Discuta.

9. *Considere un cable infinito, de radio a y resistividad ρ, que transporta una corriente I, uniformemente distribuida en su interior. El cable está rodeado por otro condutor cilíndrico, que hace de camino de retorno para la corriente, con radio interior $b > a$ y radio exterior $c \to \infty$ (esta última condición asegura que $E = 0$ dentro del condutor de retorno).

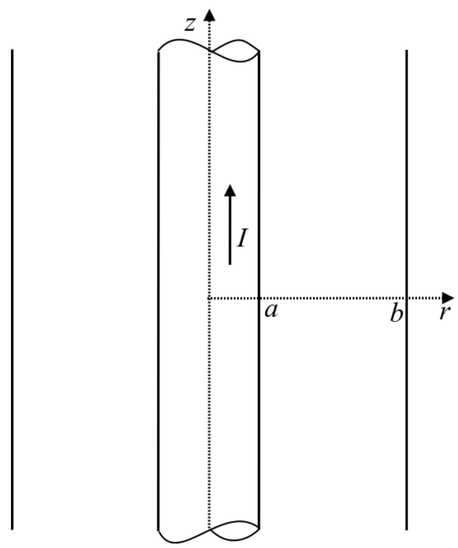

Figura 1

a) Calcule los campos eléctrico y magnético dentro del cable.

b) Resuelva la ecuación de Laplace en $a < r < b$ y demuestre que las componenetes radial y longitudinal del campo eléctrico en esa región son:

$$E_r = \frac{\rho I}{\pi a^2} \frac{z}{r} \frac{1}{\ln(a/b)}$$

$$E_z = \frac{\rho I}{\pi a^2} \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}$$

Ayuda: En la separación de variables suponga que el potencial es de la forma $\Phi = z\psi(r)$.

c) ¿Cuál es el orden de magnitud de la carga superficial que aparece en el cable?

d) En un plano (r, z) trace las líneas equipotenciales y las líneas de campo del problema.

e) Observe que las líneas equipotenciales son también las líneas de flujo del vector de Poynting $\vec{S}$. Obtenga el diagrama de flujo de energía de este problema en la forma de la figura 2.

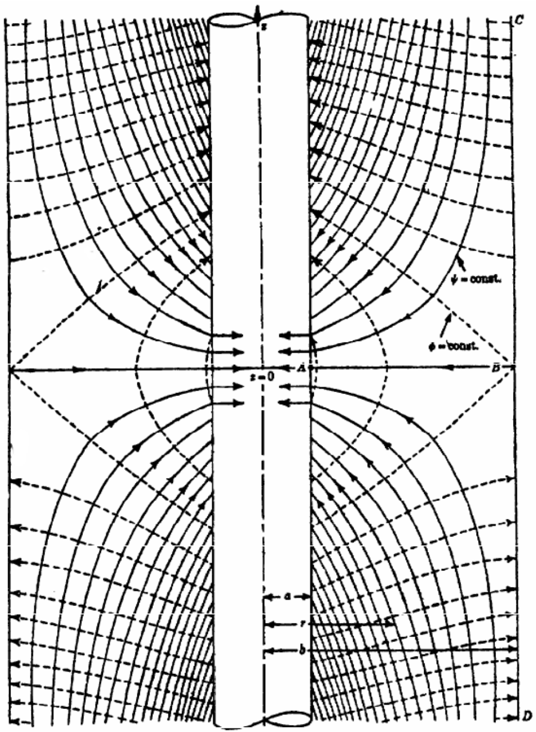

Figura 2

10. *Considere los teoremas de conservación de la energía y momento en medios materiales isotrópicos y uniformes con permitividad eléctrica ϵ y permeablidad magnética μ.

a) Mediante un cálculo inmediato puebe que la densidad de energía, vector de Poynting, densidad de momento y tensor de tensiones de Maxwell están dados por la expresión de Minkowski

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2) \\
S &= E \times H \\
g &= \epsilon\mu E \times H = 1/c^2 E \times H \\
T_{ij} &= \epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{\delta_{ij}}{2} u
\end{aligned}
$$

b) Rescriba las expresiones anteriores en términos de los campos D y B.

c) Cuando el medio no es lineal e isotrópico existe una controversia (Minkowski-Abraham) referida a cuál de las dos expresiones encontradas para la densidad de momento g es la correcta. Vea la discusión en la sección 15.8.3 de *Zanwill, Modern Electrodynamics.*