Práctico 6

Determinantes

1. Calcular los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 13 & 26 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \\ 11 & 11 & 11 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 14 & 0 & 28 & 14 \\ 13 & 13 & 0 & 13 \\ 12 & 0 & 12 & 12 \\ 11 & 11 & 11 & 22 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 5 & 5 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Sabiendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix}.$$

3. Sea A una matriz $n \times n$. Calcular los siguientes determinantes en función de n y del determinante de A.

$$\det(2A), \quad \det(-A), \quad \det\left(A^2\right), \quad \det\left(A^t A\right).$$

4. Determinantes de tipos particulares de matrices.
   - *a*) Probar que si n es impar y $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.
   - *b*) Una matriz cuadrada $A \in M_n(\Bbbk)$ se dice que es *nilpotente* si existe algún número natural k tal que $A^k = 0$. Probar que si una matriz es nilpotente, entonces su determinante es nulo.
   - *c*) Una matriz cuadrada $A \in M_n(\Bbbk)$ se dice *idempotente* si verifica $A^2 = A$. ¿Qué valores puede tomar el determinante de una matriz idempotente? Construir un ejemplo para cada uno de esos valores.

5. Calcular los determinantes de $A, B \in M_n$ definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Sugerencia: si no se le ocurre como resolverlo, se puede primero calcular los determinantes para $n = 2, 3, 4$, conjeturar la fórmula general y luego probarla.

6. Una *matriz de Vandermonde* es una matriz cuadrada de orden n de la forma

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

   donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Bbbk$ son arbitrarios.

a) Calcular $\det(V_2)$ y $\det(V_3)$.

b) Probar
$$\det(V_n) = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$
Sugerencia: restarle a cada columna de V_n su columna de la izquierda multiplicada por a_1 y luego razonar por inducción en n.

c) Deducir que V_n es invertible si y solo si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son distintos entre sí.

7. Sea consideran
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Estudiar su invertibilidad.

b) En los casos en que la matriz sea invertible, hallar su inversa.

8. Se consideran las siguientes matrices, siendo $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{k}$ arbitrarios.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 1 & k_2 & 0 \\ 0 & 1 & k_3 \end{pmatrix}.$$

a) Discutir la invertibilidad de cada matriz según los valores de k_1, k_2, k_3.

b) En los casos en que la matriz sea invertible, hallar su inversa.

9. Se consideran
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Encontrar una matriz $X \in M_3$ que verifique
$$A_1X + 2B_1 = A_2X + B_2.$$

Los ejercicios que siguen están pensados para ser resueltos usando matrices y determinantes.

10. En cada uno de los sistemas siguientes se pide que, sin resolverlos, se indique si son incompatibles, compatibles determinados o compatibles indeterminados, justificando la respuesta.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 11x + 23y + 51z + 29t & = & 0 \\ 31x + 29y + 37z + 43t & = & 0 \\ 41x - 37y + 53z + 67t & = & 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z + 2t & = & 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t & = & 0 \\ -x - 3y + 4t & = & 0 \\ 4y - z - 3t & = & 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} 5x + 5y + 5z + 5t + 5w & = & 1 \\ 5x + 9y + 9z + 9t + 9w & = & 2 \\ 5x + 5y + 8z + 8t + 8w & = & 3 \\ 5x + 5y + 5z + 7t + 7w & = & 4 \\ 5x + 5y + 5z + 5t + 6w & = & 5 \end{array}\right..$$
Sugerencia: para los dos últimos sistemas, tener en cuenta el ejercicio 1.

11. Se considera
$$\left\{\begin{array}{rcl} ax - 3y & = & 0 \\ 4x + (1-a)y & = & 0 \end{array}\right..$$

a) Encontrar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite soluciones no triviales.

b) Hallar todas sus soluciones, discutiendo según a.

12. Se considera el siguiente sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} -ax + (a-1)y + (5a+2)z & = & 1 \\ (1-a)x + (a+1)y + (5a+5)z & = & 5 \\ (2-a)x + (a+3)y + (a+7)z & = & 9 \end{array}\right..$$
Indicar si es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado, discutiendo según $a \in \mathbb{R}$.