# Combinatoria

Notas para el curso de Matemática Discreta 2023, dictado por
Mariana Haim y Santiago Robaina.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

## 0.1. Permutaciones

Consideremos el siguiente problema:

*¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras A,B,C,D,E y F?.*

Observemos que para elegir la primera letra tenemos 6 posibilidades. Luego de esta elección, nos quedan 5 posibilidades para la siguiente letra. Entonces por el principio del producto, tenemos $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades para elegir las primeras dos letras. Siguiendo de este modo, podemos concluir que la cantidad de formas de ordenar estas letras es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!$.

Para generalizar y abstraer este problema, observemos que el problema de contar las formas de ordenar $n$ símbolos diferentes es equivalente al problema de contar reordenaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$, es decir que existe una función biyectiva entre el conjunto de todas las posibles palabras formadas por el conjunto original de símbolos y el conjunto de todas las posibles reordenaciones de $\{1, \dots, n\}$. Por esto nos concentraremos en este último conjunto, del que daremos una definición.

Podemos ver una reordenación de $\{1, \dots, n\}$ como una función biyectiva, pues escribir la secuencia $3, 2, 4, 1, 5$ es equivalente a definir una función

$$f : \{1, \dots, 5\} \to \{1, \dots, 5\}$$

de forma tal que $f(1) = 3$ (el tres ocupa el primer lugar), $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ y $f(5) = 5$. Definimos entonces el conjunto

$$\mathcal{S}_n = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : f \text{ es biyectiva}\},$$

y notamos $P_n = \#\mathcal{S}_n$. Decimos que $P_n$ es el **número de permutaciones de $n$ elementos**. Así la identificación de $\mathcal{S}_n$ con las formas de ordenar $n$ queda

$$f \mapsto f(1)f(2)\dots f(n).$$

En el primer ejemplo, vimos que $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Esto nos da una idea de lo que debe ser $P_n$ para cualquier $n$. En general tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 0.1.1.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $P_n = n! = n.(n-1)\dots 2$.*

*Demostración.* Probaremos esto por inducción.
Observemos que para $n = 0$ se tiene $P_0 = 1$, puesto que la función nula es el único elemento de $\mathcal{S}_n$, entonces $P_0 = 0! = 1$.
Supongamos que $P_n = n!$. Luego observamos que ordenar el conjunto $\{1, \dots, n+1\}$ es un proceso que se puede hacer en dos pasos:

- Se coloca primero un elemento en el lugar $n+1$. Para esto se tienen $n+1$ posibilidades.
- Se ordenan los restantes $n$ elementos en los primeros $n$ lugares. Para esto se tienen $P_n = n!$ posibilidades.

Por el principio del producto se tiene $P_{n+1} = (n+1).n! = (n+1)!$. $\square$

Podemos interpretar la prueba anterior en los términos del Principio del Producto. Aquí el conjunto $I$ es $\{1, \dots, n+1\}$, y para cada $i \in I$ se tiene que

$$A_i = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1\} : f \text{ es biyectiva}\}.$$

Se observa que $A_i \simeq \mathcal{S}_n$ para todo $i \in I$, por lo que $\#A_i = n!$. Luego el conjunto

$$X = \{(i, f) : i \in I, f \in A_i\}$$

tiene cardinal $n!(n+1) = (n+1)!$. Por otro lado uno puede observar fácilmente que $\mathcal{S}_{n+1} \simeq X$, mediante la función biyectiva $f \mapsto (f(n+1), f|_{\{1,\dots,n\}})$.

**Ejercicio 0.1.2.** Una cantidad $n$ de personas se sientan alrededor de una mesa circular para jugar un juego de cartas. La silla ocupada por cada persona no tiene ninguna injerencia en el juego, sin embargo la persona que cada jugador tenga a la derecha o a la izquierda sí la tiene.
¿Cuántas configuraciones posibles hay?

El número hallado en el ejercicio anterior se conoce como el número de **permutaciones circulares de $n$ elementos**, y se nota por $PC_n$. Vamos a aprovechar lo que sabemos de relaciones de equivalencia para expresar $PC_n$ como el cardinal de un conjunto.

Observemos que la diferencia entre la cantidad buscada en el Ejercicio 0.1.2 y la cantidad de permutaciones (usuales) es que los $n$ elementos se ordenan de forma circular en lugar de ordenarse de forma lineal. Por ejemplo, la ordenación lineal 135246 (de 6 personas) es diferente a la ordenación 524613, pero ambas coinciden cuando se piensan como permutaciones circulares.

Así, por cada permutación circular de $n$ elementos, se tienen $n$ permutaciones lineales (podríamos formalizar esto en términos de relaciones de equivalencia, si quisiéramos, lo dejamos para el lector interesado en hacerlo). Se deduce que la cantidad de permutaciones circulares es

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = (n-1)!$$

## 0.2. Arreglos

En la sección anterior consideramos las formas de reordenar $n$ símbolos diferentes, lo que es igual al cardinal del conjunto de funciones biyectivas de $\{1, \ldots, n\}$ en sí mismo. Variemos un poco esto y consideremos para dos números fijos $k \leq n$ el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}(n,k) = \{f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es inyectiva}\}.$$

Luego escribimos $A_k^n = \#\mathcal{A}(n,k)$. Este número, llamado **arreglos de $n$ elementos tomados de a $k$**, puede interpretarse como la cantidad de posibilidades de formar palabras de largo $k$ usando $n$ símbolos diferentes sin repetirlos. Hacemos aquí, al igual que en el caso de las permutaciones, la identificación

$$f \mapsto f(1)f(2)\ldots f(k).$$

Es claro que $A_n^n = P_n$.

Queremos encontrar una fórmula para $A_k^n$. Para esto observemos que definir una función $f \in \mathcal{A}(n,k)$ puede hacerse en dos pasos:

1. Se elige $f(1)$, para lo cual se tienen $n$ posibilidades.

2. Se completan las imágenes de los restantes números $2, \ldots, k$. Para esto se tienen $A_{k-1}^{n-1}$ posibilidades.

Del principio del producto obtenemos

$$A_k^n = n.A_{k-1}^{n-1} = n.(n-1).A_{k-2}^{n-2} = \cdots = n.(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

### 0.2.1. Arreglos con repetición

Supongamos ahora que permitimos repeticiones en el caso anterior, es decir, consideramos palabras de largo $k$ escritas en un abecedario de $n$ letras. La cantidad de formas de hacerlo se denotará por $AR_k^n$, estos son los **arreglos con repetición de $n$ elementos de largo $k$**. En este caso no es necesario que $k$ sea menor o igual a $n$. Observar que este número es el cardinal del conjunto

$$\{1,\ldots,n\}^{\{1,\ldots,k\}} = \{f : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\} : f \text{ función}\}.$$

Este es el producto cartesiano de $\{1,\ldots,n\}$ por si mismo $k$ veces, luego por la regla del producto tenemos $\#AR_k^n = n^k$.

## 0.3. Combinaciones

Nos interesa ahora estudiar una familia de problemas que consisten en elegir subconjuntos de un conjunto dado sin tener en cuenta el orden. Miremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 0.3.1.** Una persona entra a una heladería y pide un helado de tres sabores. Cuando llega al mostrador se encuentra con que tiene 20 sabores para elegir. ¿Qué posibilidades tiene de armar su helado?

En general notaremos por $C_k^n$ al número de formas de tomar $k$ elementos de un conjunto de cardinal $n$ y lo llamamos **combinaciones de $n$ tomadas de a $k$** (puede encontrarse también en la literatura la notación $\binom{n}{k}$ para indicar esta cantidad). De esta forma el problema planteado en el ejemplo anterior consiste en calcular $C_3^{20}$. Dicho de otra forma, $C_k^n$ es el número de subconjuntos de cardinal $k$ de un conjunto de cardinal $n$. Para ser más precisos podemos escribirlo como el cardinal de

$$\mathcal{C}(n,k) = \{A \subset \{1,\ldots,n\} : \#A = k\}.$$

**Observación 0.3.2.**

1. Hay algunos números combinatorios (así le llamaremos a los números $C_k^n$) que son muy fáciles de determinar. Por ejemplo es claro que $C_0^n = C_n^n = 1$, pues hay un solo subconjunto de $\{1,\ldots,n\}$ con 0 elementos y uno solo con $n$ elementos. También puede verse que $C_1^n = n$, esto es, la cantidad de formas de tomar un subconjunto unitario de $\{1,\ldots,n\}$.

2. Observar que $C_k^n = C_{n-k}^n$, ya que elegir un subconjunto de $\{1,\ldots,n\}$ es equivalente a elegir su complemento.

**Teorema 0.3.3.** *(Fórmula de Stiefel) Para $k \leq n$ se tiene la siguiente igualdad*

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n.$$

*Demostración.* Existen dos tipos (disjuntos) de subconjuntos de $k$ elementos de un conjunto de $n+1$ elementos:

- Conjuntos que contienen el elemento $n+1$. Estos conjuntos son $C^n_{k-1}$, porque para completarlos se necesitan tomar otros $k-1$ elementos de entre los restantes $n$.
- Conjuntos que no contienen al $n+1$. Estos son $C^n_k$.

Luego la tesis del teorema sale directamente del principio de la suma. $\square$

A partir de la Fórmula de Stiefel podemos escribir los primeros números combinatorios:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C^0_0 & & & & \\
 & & & C^1_0 & & C^1_1 & & & \\
 & & C^2_0 & & C^2_1 & & C^2_2 & & \\
 & C^3_0 & & C^3_1 & & C^3_2 & & C^3_3 & \\
C^4_0 & & C^4_1 & & C^4_2 & & C^4_3 & & C^4_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

La figura anterior es conocida como **Triángulo de Pascal**.

La siguiente proposición relaciona las combinaciones con los arreglos y las permutaciones.

**Proposición 0.3.4.** *Tomemos $k \leq n$. Luego se cumple la igualdad*

$$A^n_k = C^n_k . P_k. \tag{1}$$

*Demostración.* Aquí podemos usar el principio del producto y dividir la tarea de elegir una función inyectiva $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ en dos pasos:

1. Se elige la imagen de $f$, para lo que se tienen $C^n_k$ posibilidades.
2. Se ordenan los elementos elegidos. De esta forma se define una función biyectiva entre $\{1, \ldots, k\}$ y $f(X)$, lo que termina de definir la función $f$. Para esto tenemos $P_k$ posibilidades.

De lo anterior obtenermos (1). $\square$

A partir de la igualdad (1) y las fórmulas de arreglos y permutaciones obtenemos la fórmula para las combinaciones:

$$C^n_k = \frac{n!}{(n-k)!.k!} \tag{2}$$

De esta forma podemos terminar el Ejemplo 0.3.1 concluyendo que el cliente tiene

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140.$$

posibilidades de armar su helado.

### 0.3.1. Teorema del binomio

Nos enfocamos ahora en el problema de calcular la $n$-ésima potencia de un binomio $x + y$. Veamos los primeros ejemplos:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^2$

Observamos que en los primeros ejemplos los coeficientes de los monomios corresponden a las primeras filas del triángulo de Pascal. Esto inspira el siguiente resultado:

**Teorema 0.3.5** (Teorema del Binomio)**.**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k. \tag{3}$$

Daremos dos pruebas del Teorema del Binomio. La primera será por inducción mientras que para la segunda usaremos un argumento puramente combinatorio.

*Primera prueba del Teorema del binomio.* Como vimos en los ejemplos, el caso para $n = 1$ ya está probado. Supongamos entonces que la fórmula (3) se cumple para cierto

$n$. Luego

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y).\left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k (x+y)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(C_k^n x^{n+1-k} y^k + C_k^n x^{n-k} y^{k+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}^n x^{n+1-k} y^k\\
&= C_0^n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_k^n + C_{k-1}^n\right) x^{n+1-k} y^k + C_n^n y^{n+1}
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Stiefel en el sumando del medio y las igualdades $C_0^n = C_0^{n+1} = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ en los otros, obtenemos

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k.$$

La prueba termina usando el principio de inducción. □

Para escribir la segunda prueba veamos lo que sucede en le caso $n = 3$. Desarrollamos entonces $(x+y)^n$ de la siguiente manera:

1º. Del producto $(x+y)(x+y)(x+y)$ elegimos $x$ en los tres factores, luego obtenemos $x^3$.

2º. Elegimos $x$ de los dos primeros e $y$ del tercero. Obtenemos $x^2y$.

3º Elegimos $x$ del primero y del tercero e $y$ del cuarto. Obtenemos $x^2y$

4º Elegimos $y$ del primero y $x$ de los otros dos. Obtenemos $x^2y$.

Siguiendo de esta manera, los pasos 4, 5 y 6 corresponden a elegir dos $y$ y un $x$, y el séptimo a elegir $y$ en todos los factores. Finalmente tenemos:

$$(x+y)^3 = x^3 + x^2y + x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

*Segunda prueba del Teorema del binomio.* Generalizado la idea anterior vemos que elegir de cada uno de los $n$ factores $(x+y)$ de $(x+y)^n$ una variable $x$ o $y$ se corresponde con elegir una función $f : \{1, \ldots, n\} \to \{x, y\}$. De esta forma por ejemplo $f(k) = x$ significa que estamos tomando $x$ en el $k$-ésimo factor. Se tiene entonces

$$(x + y)^n = \sum_{f \in X} f(1) \ldots f(n),$$

donde $X = \{x, y\}^{\{1,\ldots,n\}}$ es el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ a $\{x, y\}$.

El coeficiente de $x^{n-k}y^k$ en el desarrollo es exactamente la cantidad de funciones $f$ que cumplen $f(1) \ldots f(n) = x^{n-k}y^k$, es decir, el cardinal del conjunto

$$\{f \in X : \#f^{-1}(y) = k\}.$$

Este es equipotente con $\{A \subset \{1, \ldots, n\} : \#A = k\}$, luego el coeficiente que estamos buscando es $C_k^n$. $\square$

### 0.3.2. Desórdenes

Consideramos aquí el siguiente problema: dada una palabra formada por $n$ símbolos diferentes, ¿cuántas palabras se pueden formar reordenando las letras de forma tal que ninguna quede en su lugar original? Llamaremos a este número **desórdenes de $n$ elementos** y lo notaremos por $D_n$. Observamos que este número es el cardinal del conjunto

$$\mathcal{D}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyctiva}, f(i) \neq i \text{ para todo } i\}$$

Una forma de hallar $D_n$ es usando el principio de inclusión-exclusión. Para esto definimos

$$A_i = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyectiva}, f(i) = i\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_n = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P_{n-k}$ y que hay $C_k^n$ intersecciones de esta forma, luego

$$D_n = P_n - nP_{n-1} + C_2^n P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n P_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_i^n P_{n-i}.$$

### 0.3.3. Cantidad de funciones sobreyectivas

Nos preguntamos ahora cuantas funciones sobreyectivas pueden definirse de un conjunto de $n$ elementos en un conjunto de $k$ elementos ($k \leq n$), es decir, cuál es el cardinal de

$$\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : f \text{ sobreyectiva}\},$$

al que notamos por $Sob(n, k)$.

Para encontrar una fórmula para este número usaremos el principio de inclusión-exclusión. Consideramos entonces $Z = \{1, \ldots, k\}^{\{1,\ldots,n\}}$ el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, k\}$, que tiene cardinal $k^n$, y los subconjuntos

$$A_i = \{f \in Z : i \notin f(\{1, \ldots, n\})\}.$$

Es claro que el conjunto de funciones sobreyectivas es $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = (k - \ell)^n$ y que hay $C_\ell^k$ intersecciones de esta forma. Luego tenemos

$$\begin{aligned} Sob(n, k) &= k^n - C_1^k(k-1)^n + C_2^k(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1} C_{k-1}^k 1^n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_i^k (k-i)^n. \end{aligned}$$

## 0.4. Otras cantidades interesantes

### 0.4.1. Combinaciones con repetición

Supongamos ahora que 10 personas están en un bar y cada una encarga una bebida entre las siguientes posibles: Agua, Cerveza, Limonada, Vino. ¿Cuántas pedidos son posibles?

Observar que los pedidos posibles pueden pensarse como las posibles formas de elegir 10 letras entre A, C, L y V. Aquí listamos algunas posibilidades:
AAAAACCLVV, AAAAAAAAAA, ACCVVVVVVV, CCCCLLVVVV

Observemos que se trata de combinar 10 elementos de A,C,L,V, sin que importe el orden y con posibles repeticiones. Es natural entonces llamar a este número “combinaciones con repetición de 4 tomados de a 10 y notarlo $CR_{10}^4$.

En general, notamos $CR_k^n$, y llamamos **combinaciones con repetición de $n$ tomadas de a $k$** a la cantidad de formas de tomar $k$ elementos en un conjunto de $n$, con posibles repeticiones, y sin que importe el orden.

Podemos interpretar los ejemplos de arriba, en términos de los símbolos $-$ y $/$, como sigue:

$$\begin{array}{rl} AAAAACCLVV & -----/--/-/-- \\ AAAAAAAAAA & ----------/// \\ ACCVVVVVVV & -/--//------- \\ CCCCLLVVVV & /----/--/---- \end{array}$$

Esto es, son las posibles formas de elegir 10 lugares (los ocupados con el símbolo $-$ en una lista de $10+(4-1)$ lugares (todos los ocupados). Esto es

$$CR_{10}^{4} = C_{1}^{10+4-1}0.$$

En general, se tiene el siguiente resultado.

$$\mathcal{CR}(n,k) = C_{k}^{k+n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Notemos además que $CR_k^n$ puede interpretarse como la cantidad de posibles soluciones de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_n = k,$$

con variables $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$. Aquí $x_i$ corresponde al número de veces que se elije el elemento $i$. Luego podemos escribir

$$CR_k^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n : x_1 + \cdots + x_n = k\}.$$

Observemos además que $CR_k^n$ también puede verse como la cantidad de formas de meter $k$ pelotas iguales en $n$ cajas distintas.

Resumiendo, el número $CR_k^n$ puede verse como la cantidad de:

- formas de elegir $k$ elementos de un conjunto de $n$ permitiendo repeticiones y sin que importe el orden.
- soluciones de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n = k$ con $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.
- maneras de distribuir $k$ objetos iguales en $n$ recipientes distintos.

### 0.4.2. Permutaciones con repetición

Pensemos en cuántas palabras pueden formarse con las letras de la palabra IBIRAPITA

Podemos imaginarnos una gran familia de ejemplos que consisten, en esencia, en este mismo problema: contar las formas de ordenar $n$ símbolos sabiendo que estos se repiten con frecuencias $n_1, \ldots, n_k$ (suponemos aquí que $n_1 + \cdots + n_k = n$). La cantidad descrita es llamada **permutaciones de $n$ elementos con repeticiones de frecuencias** $n_1, \ldots, n_k$, y se denota por $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$.
Este número puede entender como la cantidad de formas de partir un conjunto de $n$ elementos en una $k$-upla ordenada de conjuntos de cardinales respectivos $n_1, n_2, \cdots, n_k$, es decir el cardinal del conjunto

$$\mathcal{S}_{n;n_1,\ldots,n_k} = \left\{ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : \# f^{-1}(i) = n_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, k \right\},$$

donde $n = n_1 + \cdots + n_k$. Se denota por $C_{n_1,n_2,\cdots,n_k}^{n}$, porque generaliza los números combinatorios en el sentido de que $C_k^n = C_{k,n-k}^n$. En efecto, el número de la izquierda cuenta la cantidad de subconjuntos de cardinal $k$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$, el de la derecha cuenta la cantidad de formas de partir el conjunto $\{1, 2, \cdots, k\}$ en pares ordenados de subconjuntos de cardinales respectivos $k$ y $n-k$. En vistas de que el complemento en $\{1, 2, \cdots, n\}$ de un subconjunto de orden $k$ es un subconjunto de orden $n-k$ se tiene la igualdad.

**Proposición 0.4.1.** *Para $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$, se tiene*

$$P_{\tilde{n}_1;n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

*Demostración.* Haremos la prueba por inducción en $k \geq 1$. Para $k = 1$ se tiene que los dos términos valen 1 y por tanto coinciden.
Supongamos que está probado para $k$ y que $n_1+n_2\cdots n_k+n_{k+1} = n$. Luego el principio del producto nos da la igualdad

$$P_{n;n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}} = C^n_{n_1}.P_{n-n_1;n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\cdots n_{k+1}!}$$

donde en la última igualdad se utilizó la fórmula de las combinaciones y la hipótesis de recurrencia. Simplificando, se obtiene el resultado buscado. □

Usando esta fórmula podemos rápidamente resolver el problema planteado al principio. Observar que las repeticiones correspondientes a las letras $I$, $B$, $R$, $A$, $P$ y $T$ son $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$, $n_5 = 1$ y $n_6 = 1$, luego la cantidad buscada es

$$P_{9;1,1,3,2,1,1} = \frac{9!}{1!,1!,3!,2!,1!,1!} = 9x8x7x5x4x3.$$

Usemos ahora las permutaciones con repetición para generalizar el teorema del binomio (Teorema 0.3.5).

**Teorema 0.4.2** (Teorema Multinomial)**.** *El coeficiente del monomio $x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}$ en el desarrollo $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ es*

$$P_{n;n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}.$$

*Demostración.* Siguiendo la idea de la prueba combinatoria del Teorema 0.3.5 puede verse que el coeficiente de $x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}$ en el desarrollo es $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$. □

Para ilustrar la demostración anterior supongamos que $n = 5$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 1$ y que queremos formar $x_1^2x_2x_3^2$. Una manera de obtener este monomio es haciendo la siguiente elección (marcada en negrita):

$$(x_1+x_2+x_3)^5 = (x_1+x_2+\mathbf{x_3}).(x_1+\mathbf{x_2}+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(x_1+x_2+\mathbf{x_3}).$$

Esto se identifica con la palabra $x_3x_2x_1x_1x_3$. Luego las formas de obtener dicho monomio en el desarrollo están en biyección con el conjunto de las palabras de largo cinco que se pueden formar con tres letras repitiendo dos veces $x_1$ y $x_3$. Esta cantidad es, como ya vimos, $P_{5;2,2,1}$.