

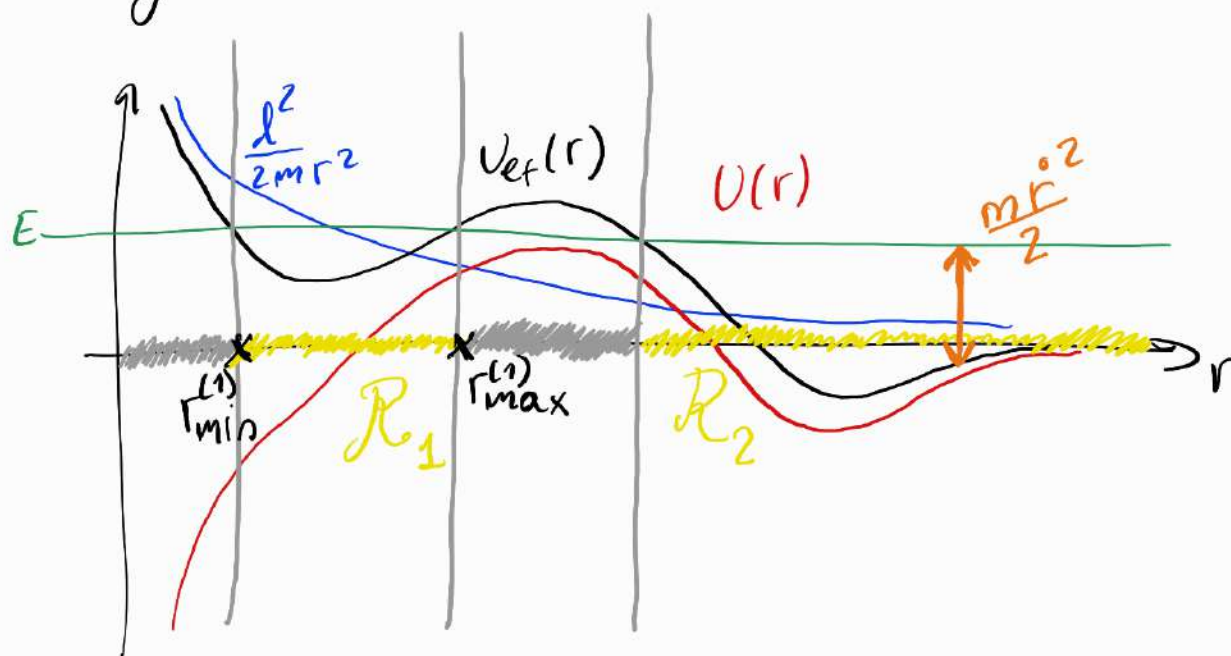
I.5.2 - Potencial efectivo, ecuaciones de movimiento y de Binet

El concepto de potencial efectivo resulta práctico y éste nos puede dar una buena descripción cualitativa de los posibles movimientos. Veámoslo.

Como estamos considerando un problema en que únicamente existe una fuerza central, la cual es conservativa por construcción, la energía mecánica E del sistema se conserva. Además, vimos que el momento angular $\vec{L}_0$ también es una constante del movimiento y, por lo tanto, E y $l = |\vec{L}_0|$ están dados por las condiciones iniciales.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{ef}}(r)$$

Graficamos $U_{\text{ef}}(r)$, $U(r)$ y $\frac{l^2}{2mr^2}$ en términos generales y la energía E



La energía debe ser siempre $E > U_{\text{ef}}$ ya que

$$E - U_{\text{ef}}(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2}$$

Esto implica que las regiones grises son inaccesibles al sistema para estos valores de E y l considerados y el sistema está restringido a la región amarilla.

Además, la diferencia entre la separación entre la energía y el potencial efectivo para un valor de r dado es la contribución a la energía cinética de la componente radial de la velocidad $\frac{m\dot{r}^2}{2}$ que marcamos en naranja.

Si la partícula inicialmente se encontraba en la región $\mathcal{R}_1$ entonces se mantendrá allí, en cambio si se encontraba en $\mathcal{R}_2$ se quedará en $\mathcal{R}_2$.

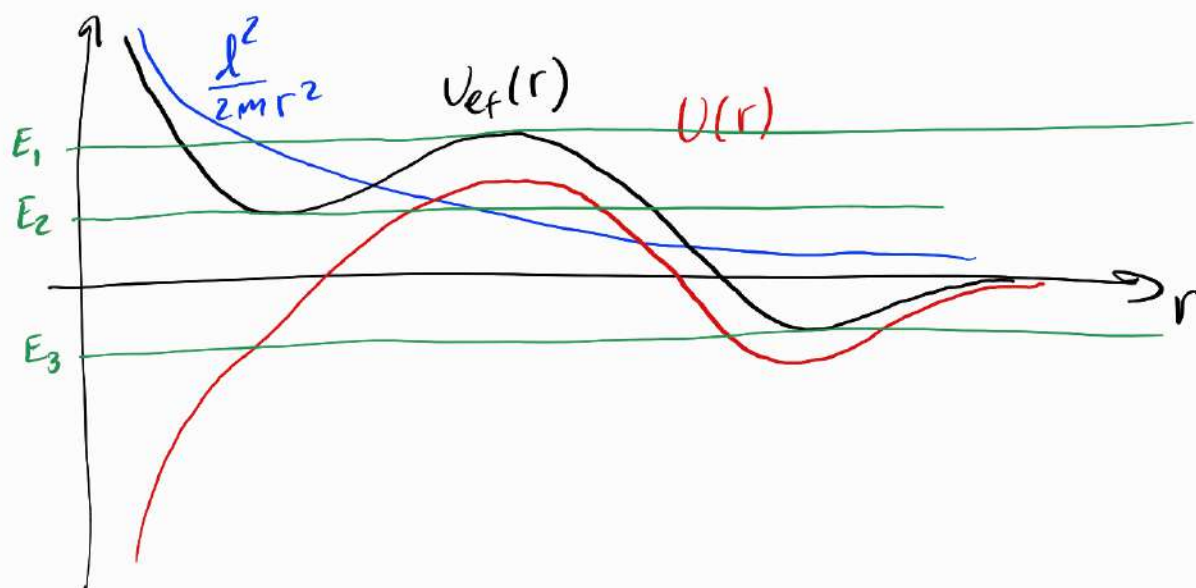
La órbita en la región $\mathcal{R}_1$ será una órbita acotada ya que la partícula no puede cruzar las cotas $r_{\min}^{(1)}$ y $r_{\max}^{(1)}$ porque esto implicaría que $E < U_{\text{ef}}(r)$.

Observación: que la órbita sea acotada no implica que esta sea cerrada dando lugar a un movimiento periódico. Si la órbita no se cierra sobre sí misma decimos que la órbita es abierta.

La órbita en $\mathcal{R}_1$ puede ser acotada y cerrada o acotada y abierta (dependerá de condiciones iniciales particulares y/o de la forma del potencial $U(r)$).

Por otro lado la órbita en $\mathcal{R}_2$ solo puede ser no acotada (y por ende abierta).

Existen valores de energía particulares: E_1 , E_2 y E_3 para los cuales existen movimientos circulares. Esto se da en los máximos y mínimos del potencial efectivo.



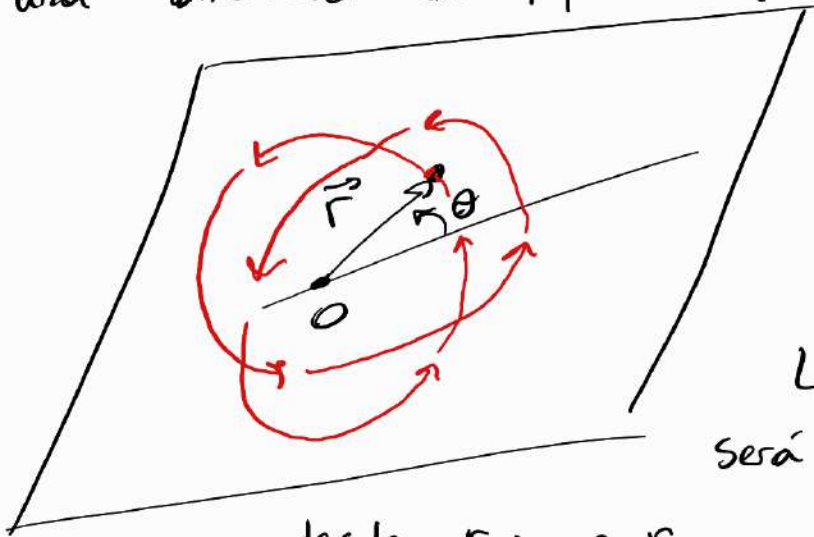
Por ejemplo, si la partícula tiene una energía $E_1 = \max_r \{U_{\text{ef}}(r)\}$ entonces en dicho punto la fuerza centrífuga $\frac{l^2}{mr^3} \hat{e}_r$ y la fuerza central $-\frac{dU}{dr} \hat{e}_r$ se equiparan y por lo tanto si la partícula es colocada allí con $\dot{r}(t=0) = 0$, la misma se mantendrá en esta posición. lo mismo sucede en los mínimos del potencial. Sin embargo estos casos son diferentes ya que la órbita circular es inestable para los máximos y estable para los mínimos del potencial efectivo $U_{\text{ef}}(r)$.

Observación: para las energías E_1 y E_2 existen órbitas de otros tipos: abiertas y acotadas en el caso de E_1 y abiertas y no acotadas en los casos de E_1 y E_2 .

Sin embargo, para el valor de energía E_3 (dado el valor de l !!) existe una única órbita que es la circular.

¿Órbitas cerradas?

Para estudiar si una órbita acotada será cerrada o no debemos considerar la dependencia angular. Sea θ el ángulo en el plano del movimiento que forma la partícula respecto a una dirección de referencia.



queremos saber si al cabo de un número dado de vueltas será

$$r(\theta + 2n\pi) = r(\theta).$$

La condición para esto será que, al cabo de moverse

desde $r_{\min}$ a $r_{\max}$, las cotas de la órbita, la partícula avance un valor $\Delta\theta_{m \rightarrow M}$ que sea una fracción

racional de π : $\left| \Delta\theta_{m \rightarrow M} = \frac{p}{q} \pi \right|$ condición para órbita cerrada //

donde $\Delta\theta_{m \rightarrow M}$ lo hallamos de la siguiente forma:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U_{ef}(r)} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U_{ef}(r)}$$

Pero $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{l} r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}$

$$\Rightarrow \pm \frac{l}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E - U_{ef}(r)}} = \frac{d\theta}{dr}$$

e integrando esto es $\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr$

es $\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{d\theta}{dr} dr = \Delta\theta_{m \rightarrow M} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}}$

y el avance angular desde $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$ debe ser una fracción racional de 2π :

$$2\pi \frac{p}{q} = \Delta\theta_{m \rightarrow M} + \Delta\theta_{M \rightarrow m} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \left[\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}} - \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}} \right] = 2 \Delta\theta_{m \rightarrow M}$$

Ecuaciones de movimiento y de Binet

Restringidos al plano de movimiento, determinado por la posición y velocidad inicial, y trabajando con las coordenadas polares planas r y θ , la segunda ley de la mecánica se lee

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta = F(r)\hat{e}_r + \ddot{\vec{r}} \quad \text{con una flecha roja de } \ddot{\vec{r}} \text{ hacia el término } m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

ya vimos que en la dirección $\hat{e}_\theta$ tenemos

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{dL}{dt} = 0$$

y en la dirección radial será:

$$m\ddot{r} = F(r) + m r \dot{\theta}^2 = F(r) - \frac{L}{mr^3}$$
$$\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$$

Debemos tratar el problema:

$$m\ddot{r} = F(r) - \frac{L}{mr^3}$$

Este problema es en gral complejo pero existe un cambio de variable que es útil en muchos casos y nos lleva a lo que denominamos ecuaciones de Binet.

Consideremos el cambio de variable $r \rightarrow u = \frac{1}{r}$.

De aquí podemos ver que:

$$u' \equiv \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\theta} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{m\dot{r}}{L} \quad (\text{I})$$

$L = m r^2 \dot{\theta}$

$$u'' \equiv \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{m}{L} \frac{d\dot{r}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{m}{L} \ddot{r} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{m^2 r^2}{L^2} \ddot{r} \quad (\text{II})$$

Si ahora retomamos la ecuación de movimiento, combinando con (I) es

$$F(r) + \frac{l^2}{mr^3} = m\ddot{r} = - \frac{l^2}{m} \frac{u''}{r^2} \quad \text{o reemplazando todo en}$$

términos de u es:

$$\frac{l^2}{m} u^2 [u + u''] + F\left(\frac{1}{u}\right) = 0$$

Entonces si $l \neq 0$ y $u \neq 0$ ($r < \infty$) es:

$$(E.B.) \quad \boxed{u + u'' + \frac{m}{l^2} \frac{F(1/u)}{u^2} = 0}$$

esto es lo que llamamos Ecuación de Binet.

Observación: en términos de u , el módulo de la velocidad de

la partícula es: $\boxed{v = \frac{l}{m} \sqrt{u'^2 + u^2}}$

Ejercicio:
Probar esto

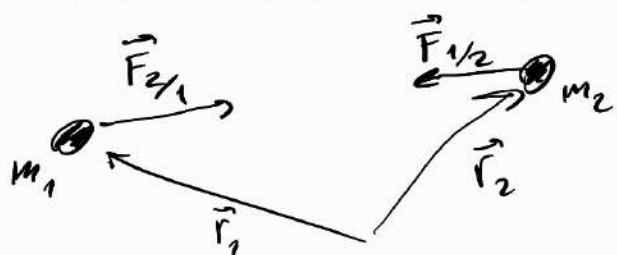
La ecuación de Binet es particularmente útil para fuerzas de la forma $\propto r^{-2}$ o $\propto r^{-3}$.

I.5.3 - Problema de Kepler

Ahora nos centraremos en trabajar el problema de Kepler o de los dos cuerpos bajo atracción gravitatoria.

Repasando el recorrido realizado:

i) partimos de dos masas puntuales m_1 y m_2 en las posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ cuya interacción es:



$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = - \frac{G m_1 m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (P.D.C.)$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2/1}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1/2}$$

ii) definimos variables y parámetros nuevos

masa total	masa reducida	centro de masas	separación relativa
$M \equiv m_1 + m_2$	$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{M}$	$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$	$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

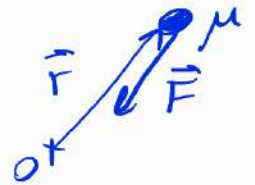
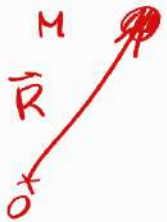
que nos permiten convertir el problema (P.D.C.) en un problema desacoplado de partículas ficticias:

Partícula libre

$$M \ddot{\vec{R}} = 0$$

Partícula sujeta a una fuerza central

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{G \mu M}{r^2} \hat{e}_r = F(r) \hat{e}_r$$



a partir de lo cual podemos recomponer el sistema.

iii) Ahora utilizaremos la tecnología de fuerzas centrales y la ecuación de Binet, convirtiendo el problema de la partícula de masa reducida en:

$$u + u'' + \frac{\mu}{l^2} \frac{F(\frac{1}{u})}{u^2} = 0 \rightarrow u + u'' = \frac{G \mu^2 M}{l^2} \equiv \frac{1}{P}$$

donde definimos el parámetro constante $P \equiv \frac{l^2}{G \mu^2 M}$

Para resolver la ecuación $u + u'' = \frac{1}{P}$ hallamos una solución particular u_p de la ecuación no homogénea:

$$u_p'' + u_p = \frac{1}{P}, \text{ por ejemplo } u_p(\theta) = \frac{1}{P}$$

y sumamos a ésta, la solución general u_H a la ecuación homogénea $u_H'' + u_H = 0$ que sabemos resolver (es, básicamente, la ecuación del oscilador armónico):

$$u_H(\theta) = A \cos(\theta + \delta) \quad \left(\text{esto es equivalente a } B \cos(\theta) + C \sin(\theta) \right)$$

De aquí que la solución general es:

$$u(\theta) = u_H(\theta) + u_P(\theta)$$

que satisface $u'' + u = \frac{1}{P}$

$$\left. \begin{array}{l} (u_P'' + u_H'') + (u_P + u_H) \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{(u_P'' + u_P)}_{\frac{1}{P}} + \underbrace{(u_H'' + u_H)}_0 = \frac{1}{P}$$

y dispone los parámetros libres para acomodar las condiciones iniciales.

Volviendo a la variable original, r , tenemos que:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{1}{P} + A \cos(\theta + \delta)} \rightarrow r(\theta) = \frac{P}{1 + \epsilon \cos(\theta + \delta)}$$

donde introducimos el parámetro ϵ denominado excentricidad que está determinado por las condiciones iniciales.

- veremos que:
- $\epsilon = 0$ corresponde a órbitas circulares
 - $0 < \epsilon < 1$ corresponde a órbitas elípticas
 - $\epsilon = 1$ corresponde a órbitas parabólicas
 - $\epsilon > 1$ corresponde a órbitas hiperbólicas.

Observación:

El sistema solar se compone por todos aquellos cuerpos que tienen $\epsilon < 1$, ya que esto lo liga al sol, y que su comportamiento está dominado por la atracción gravitatoria de éste.

