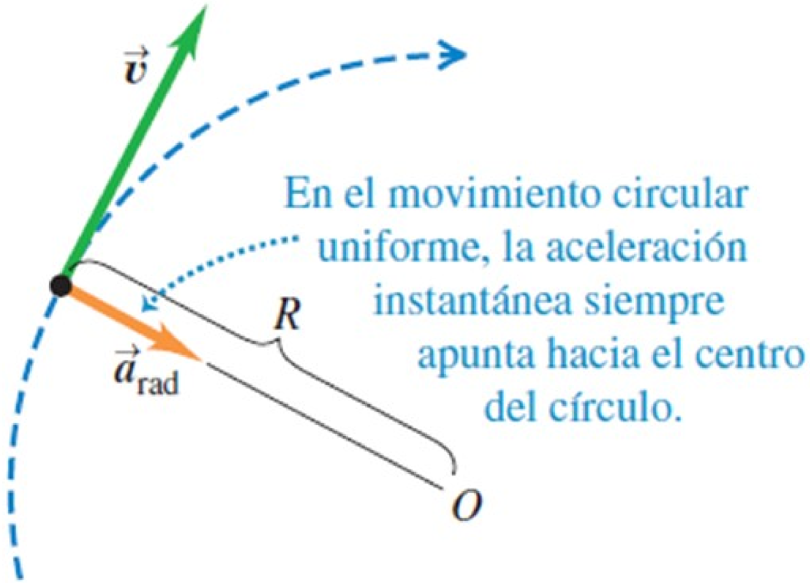
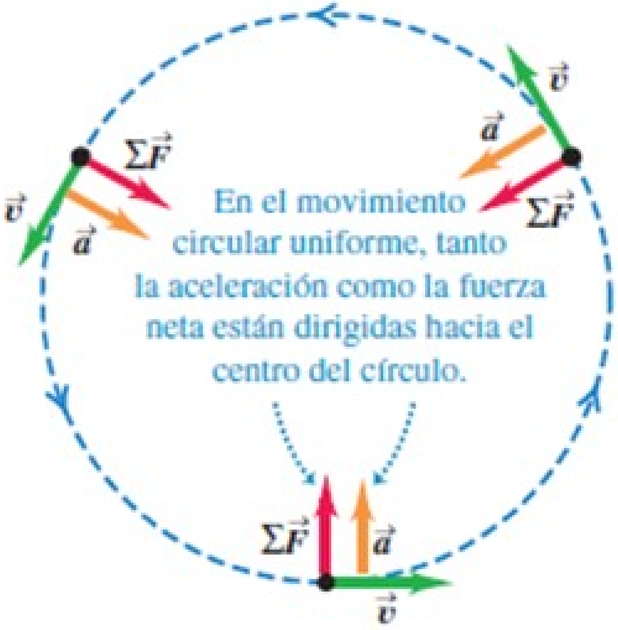
11- Movimiento circular, rotación de un rígido y aplicaciones de las leyes de Newton

REPASO DE CLASE PASADA

Movimiento circular uniforme: el cuerpo describe una trayectoria circular con *rapidez constante y el* vector aceleración es perpendicular al vector velocidad, se dirige al centro del círculo **(aceleración centrípeta)** y vale:

$$a = a_{radial} = \frac{v^2}{R}$$



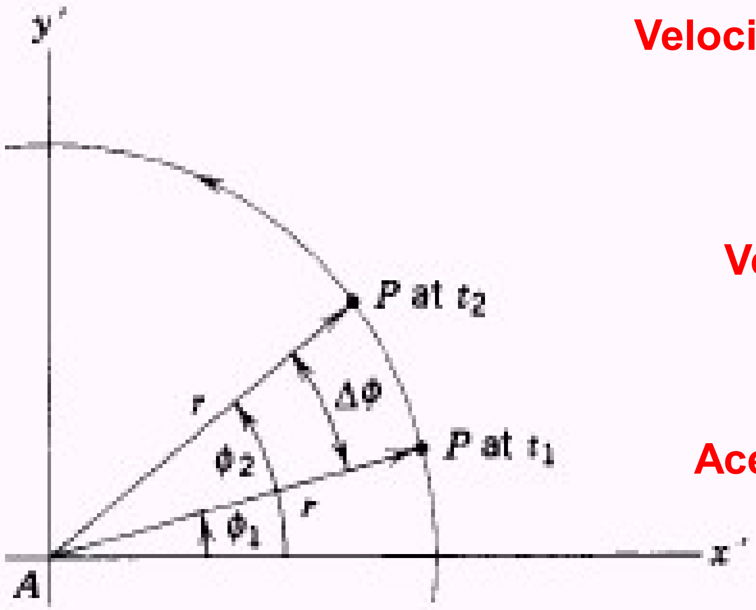


2da. Ley de Newton aplicada al MCU:
La fuerza neta tiene dirección radial y aplicada en ella se tiene:

$$F_{neta} = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R}$$

Cinemática de movimiento rotacional:
Similar a la rectilínea con variables angulares: ángulo θ, velocidad angular ω y aceleración angular α

REPASO DE CLASE PASADA



Velocidad angular media:

$$\omega_{\text{media}} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Velocidad angular

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

Aceleración angular media:

$$\alpha_{\text{media}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleración angular:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

Velocidad angular positiva si el cuerpo gira en la dirección de Φ creciente.

Para un cuerpo rígido tanto ω como α son únicos (valen lo mismo para cada punto).

REPASO DE CLASE PASADA

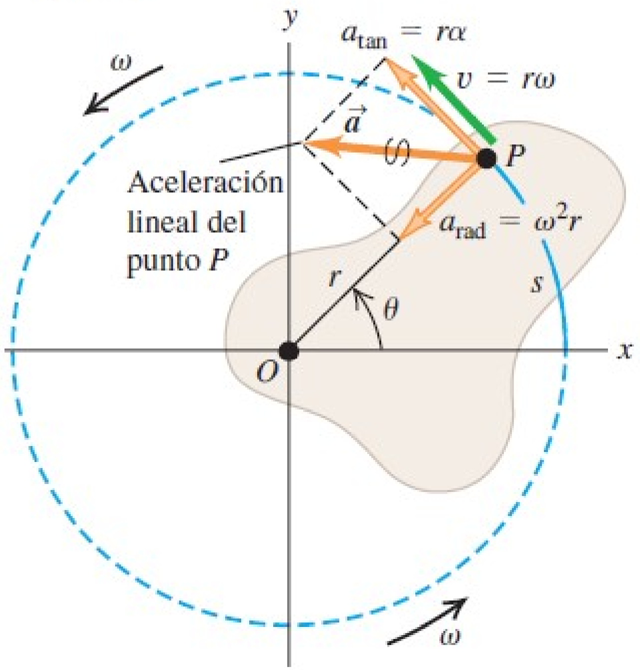
Comparación de ecuaciones entre movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante y rotación sobre un eje fijocon aceleración angular constante:

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante	Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante
$a_x = \text{constante}$	$\alpha_z = \text{constante}$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$

REPASO DE CLASE PASADA

Componentes de aceleración radial y tangencial:

- $a_{rad} = \omega^2 r$ es la aceleración centrípeta del punto P.
- $a_{tan} = r\alpha$ significa que la rotación de P está aumentando (el cuerpo tiene aceleración angular).



Rotación de un rígido alrededor de un eje fijo:

Para un cuerpo rígido, tanto la velocidad angular ω como la aceleración angular son los mismos para cualquier punto del mismo.

Se relacionan con la velocidad lineal y la aceleración tangencial de la siguiente forma:

$$v = r\,\omega$$

$$a_t = r\alpha_z$$

Cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez *angular, pero no todo punto tiene la misma rapidez tangencial porque r no es el* mismo para todos los puntos sobre el objeto.

Se vio que un punto que se mueve en una trayectoria circular tiene una **aceleración radial *a_r* *dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud* es la de la aceleración centrípeta *v^2/r***

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$

$$\overline{a} = \overline{a_t} + \overline{a_c}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha_z)^2 + (r\,\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha_z^2 + \omega^4}$$

PREGUNTAS RÁPIDAS

Nadia y Teo viajan en una calesita. Nadia viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Teo, quien viaja en un caballo interior.

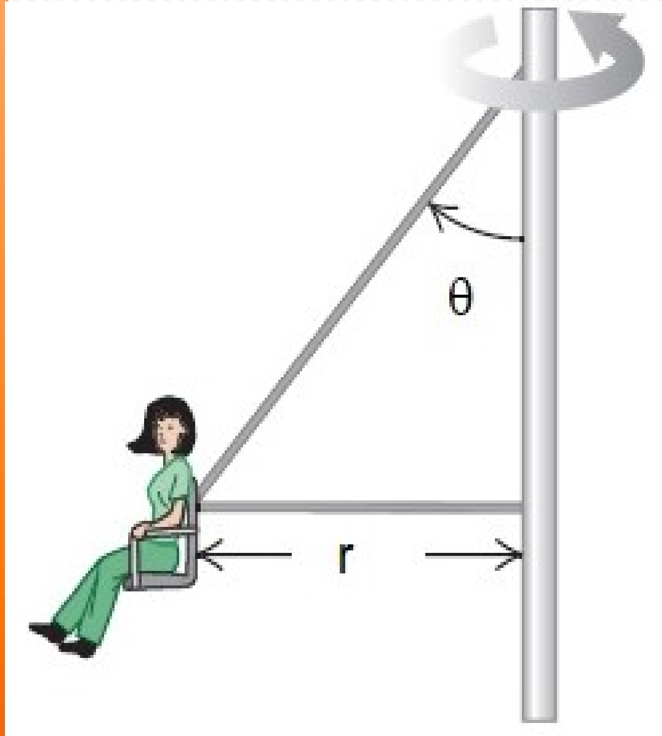
i) **Cuando la calesita en rotación** a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Nadia?

a) el doble de la de Teo,
b) la misma que la de Teo,
c) la mitad de la de Teo,
d) imposible de determinar.

ii) Cuando el carrusel en rotación con una rapidez angular constante, describa la rapidez tangencial de Nadia con la misma lista de opciones.

a) el doble de la de Teo,
b) la misma que la de Teo,
c) la mitad de la de Teo,
d) imposible de determinar.

4.14.- Examen agosto 2021



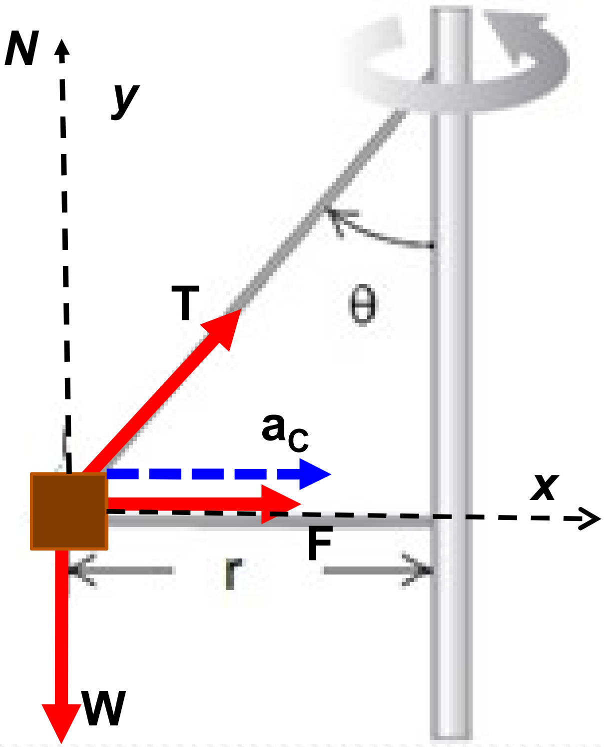
a) En un parque de diversiones, uno de los juegos es el denominado "columpio gigante", en el que un eje vertical central gira, moviendo una serie de brazos que tienen asientos sostenidos por cables. Cada asiento está conectado a dos cables, uno de los cuales es horizontal, y otro forma un ángulo θ con el eje vertical, como se muestra en la figura. El asiento gira en un círculo horizontal de radio ***r = 7,50 m*** a una rapidez de ***v = 22,0 m/s***. Si el ángulo **θ = *40,0°*** y el peso del asiento más el de la persona sentado en él vale ***W = 1,08×10³ N***, ¿cuánto vale la tensión (expresada en newtons) del **cable horizontal**? *Considere a g=9,80 m/s² como valor exacto.*

4.14.- Examen agosto

Datos: r = 7,50 m; θ = 40,0°; *v = 22,0 m/s; W = 1,08×10³ N*

Hacemos el D.C.L:

Planteo la 2da. Ley de Newton para c/u de los ejes



y) 0 = T.cosθ - W = 0
x) m.ac= F+ T.senθ

$$T = \frac{W}{cos\theta} = \frac{1{,}08 \times 10^3}{\cos 40{,}0°} = 1409{,}84\ N$$

$$F = m.a_c - T \sin\theta = \frac{W}{g}\frac{v^2}{r} - T\sin\theta$$

$$F = \frac{1{,}08 \times 10^3}{9{,}80}\frac{22{,}0^2}{7{,}50} - 1409{,}84 \sin 40{,}0° = 6{,}21 \times 10^3\ N$$

F = 6,21×10³ N

4.14.- Examen agosto

b) Con respecto a la situación anterior, ¿cuál de las siguientes aseveraciones es **la falsa**?

a) Si consideramos que el peso (es decir la fuerza gravitacional) sobre la persona que va en el asiento es la "acción", entonces, la fuerza normal que ejerce el asiento sobre la persona NO es la fuerza de "reacción" al peso, que establece la Tercera Ley de Newton.

b) La tensión en el cable horizontal es mayor que el que experimenta el cable inclinado.

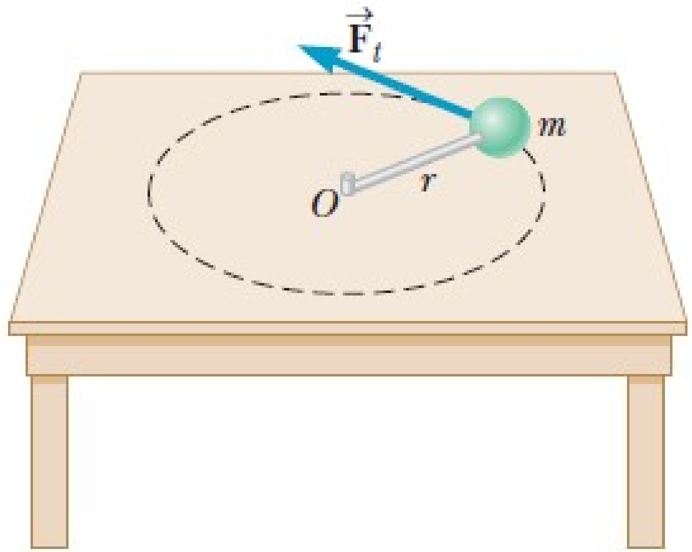
c) Si se aumenta la rapidez del asiento, la tensión en el cable inclinado no varía.

d) La tensión en el cable inclinado (el que forma un ángulo θ con el eje de rotación) vale $W.\text{sen}\theta$, siendo W el peso del asiento más el de la persona que va en él.

e) La persona en el asiento experimenta una aceleración centrípeta la cual es proporcional al cuadrado de la rapidez v.

Relación entre el torque y la aceleración angular

Veremos que cuando un rígido está sujeto a un torque neto, experimenta una aceleración angular proporcional al mismo, resultado similar a la 2da. ley de Newton, pero para rotaciones.



Sistema de la figura: objeto de masa *m unido a una barra muy* ligera de longitud *r, que gira alrededor del punto O sobre* una mesa *horizontal sin fricción. Supongamos que una fuerza F_t actúa perpendicularmente* a la barra (tangente a la trayectoria circular del objeto).

Debido a que no hay fuerza opuesta a la fuerza tangencial, el objeto experimenta una aceleración tangencial a_t *de acuerdo con la segunda ley del Newton:* $m.a_t = F_t$

Muliplicando ambos miembros por r: $m.a_t.r = F_t.r$

Y ahora, sustituyendo: $a_t = \alpha.r$ *resulta:* $m.\alpha.r^2 = F_t.r$

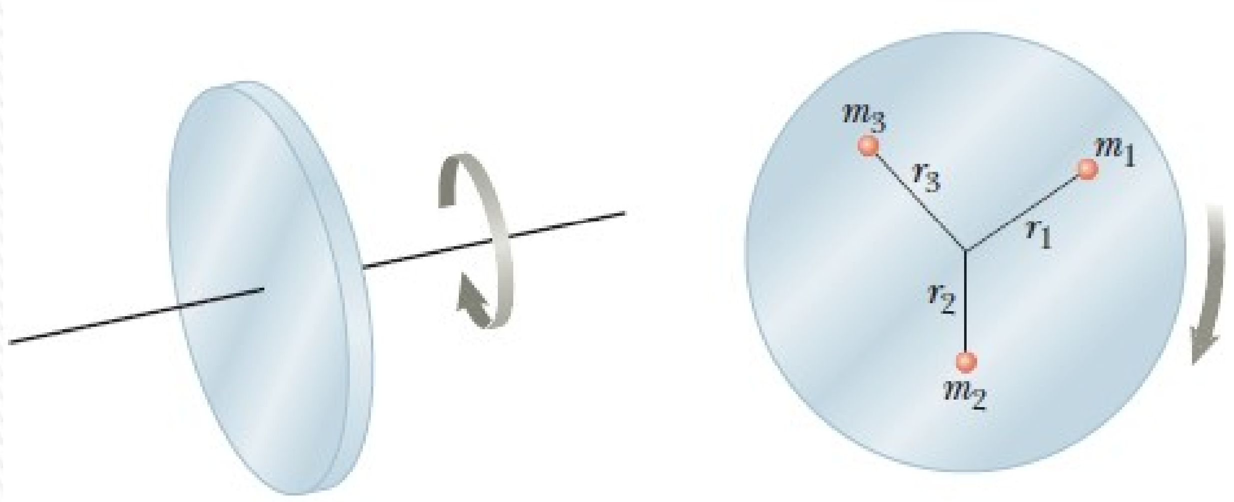
Pero el 2do. miembro es el torque que actúa sobre el objeto en relación con su eje de rotación, así que se puede rescribir como $m.\alpha.r^2 = \tau$

Relación entre el torque y la aceleración angular

$$m.r^2\ \alpha = \tau$$

$$I.\alpha = \tau$$

El torque (τ) sobre el objeto es proporcional a la aceleración angular (α) de éste, donde la constante de proporcionalidad mr^2 *se conoce como el* ***momento de inercia (I)*** del objeto de masa *m* *con respecto al punto O.*
(Como la barra es muy ligera, su momento de inercia puede despreciarse).



Sea un disco sólido que rota sobre su eje como en la figura.
El disco consiste en muchas partículas a varias distancias del eje de la rotación.
El torque en cada una de estas partículas está dado por la ecuación anterior.

El torque *neto sobre* el disco está dado por la suma de los torques individuales τ_i en todas las partículas, y etiquetando a c/u de las masas y a sus distancias con respecto al eje con un subíndice *i* :

$$\sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i . r_i^2\right)\alpha$$

Como el disco es rígido, todas sus partículas tienen la *misma aceleración angular,* así que a no está involucrada en la suma.

Relación entre el torque y la aceleración angular

$$\sum_i m_i.r_i^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \cdots$$

Esta cantidad es el **momento de inercia, *I*,** *de todo el cuerpo respecto al eje que pasa por O.:*

El momento de inercia tiene unidades SI de $kg.m^2$.
Utilizando este resultado en la ecuación anterior, vemos que el torque neto sobre un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo está dado por:

$$\sum \tau = I\alpha$$

La expresión indica que **la aceleración angular de un objeto rígido es proporcional al torque neto que actúa sobre él,** y es el análogo rotatorio de la 2da. Ley de Newton.

En esta ecuación el torque sustituyendo a la fuerza, el momento de inercia que sustituye a la masa y la aceleración angular, a la aceleración lineal.

Aunque el momento de inercia de un objeto se relaciona con su masa, hay una importante diferencia entre ellos.
La masa *m depende solamente de la cantidad de materia en un objeto, mientras* que el momento de la inercia, *I, depende de la cantidad de materia y de su distribución* (con el término r^2 *en* $I = \Sigma mr^2$*) en el objeto rígido.*

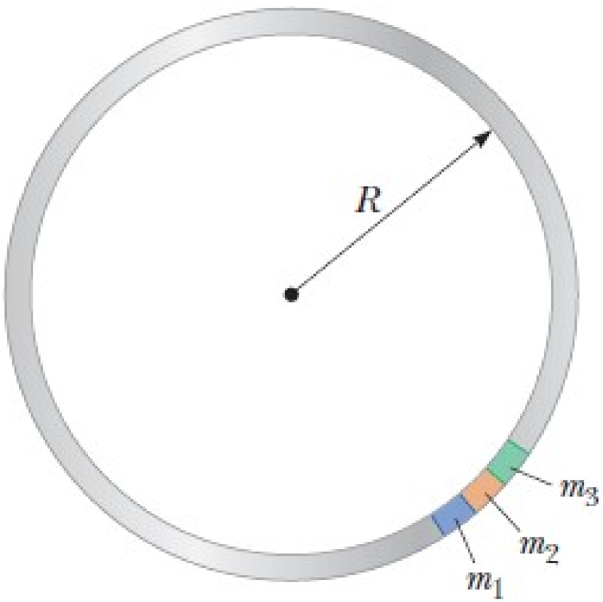
Momento de inercia

Como vimos una partícula tiene un momento de inercia igual a *mr^2 en relación con un cierto eje.*

El momento de inercia de un objeto compuesto sobre un cierto eje es justo la suma de los momentos de inercia de los componentes del objeto

$$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

La masa es una característica intrínseca del objeto y que no cambia, mientras que el **momento de inercia de un sistema depende de cómo la masa se distribuye y de la ubicación del eje respecto al cual se calcula I .**



Cuando el objeto es continuo, como una esfera o un cilindro se requieren a menudo técnicas del cálculo, a menos que una cierta simetría esté presente.
Un objeto de solución simple es un aro que rota sobre un eje perpendicular a su plano y que pasa a través de su centro (como la rueda de una bicicleta). Para evaluar el momento de inercia del aro, podemos todavía utilizar la ecuación $I = \Sigma mr^2$ *e imaginarse que la masa del aro M está dividida en n pequeños segmentos de* masas $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, *como se ve en la figura, con* $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n$.

Momento de inercia

Podemos expresar *I como la suma:* $$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2$$

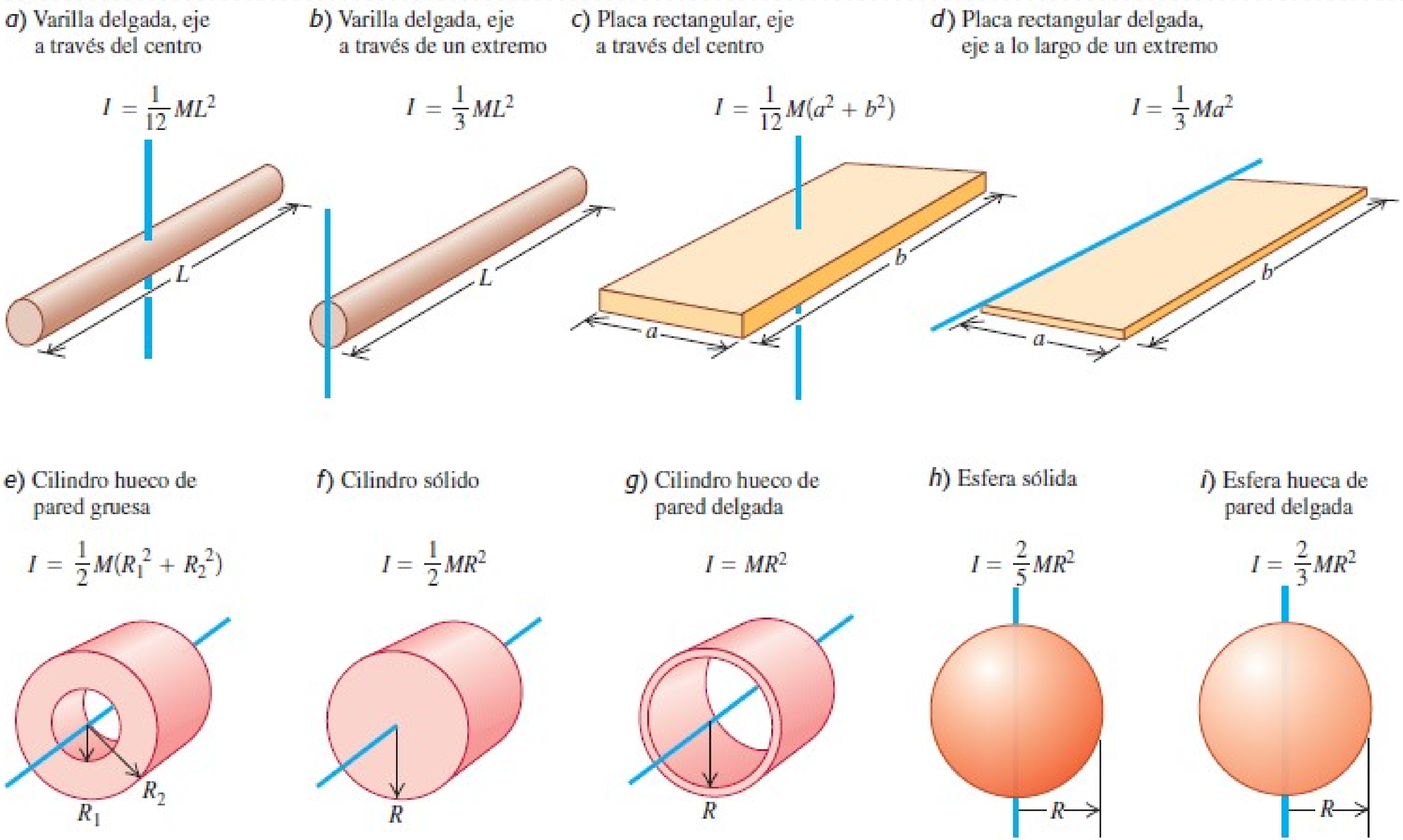
Todos los segmentos alrededor del aro están a la *misma distancia R del eje de rotación, así* que podemos usar subíndices en las distancias y factorizar R_2 *para obtener*

$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n)R^2 = MR^2$$

Expresión que se puede usar para el momento de inercia de cualquier objeto de forma anular, que rota sobre un eje a través de su centro y perpendicular a su plano. Este resultado es estrictamente válido solamente si el grueso del anillo es pequeño en relación con su radio interno.
Desafortunadamente, para objetos más extensos el cálculo es más difícil porque no todos los elementos demasa están situados a la misma distancia del eje, por lo que se requieren los métodos del cálculo integral.

Los momentos de inercia para algunas otras formas comunes se muestran en la próxima diapositiva.
Se puede utilizar esta tabla cuando necesite determinar el momento de inercia de un cuerpo que tiene las formas mencionadas

Momentos de inercia de diversos cuerpos homogéneos

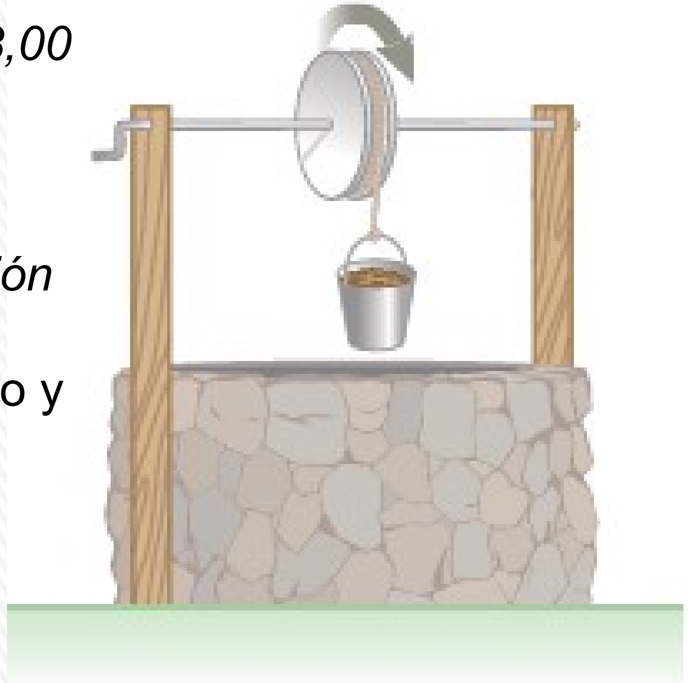


Ejemplo: Descenso de un balde en un pozo

Un carrete sólido cilíndrico sin fricción, de masa *M=3,00 kg y radio R=0,400 m, se usa para* sacar agua de un pozo. Un balde de masa *m*= 2,00 kg se ata a una cuerda ideal que se enrolla alrededor del cilindro.

a) Encuentre la tensión *T en la cuerda y la aceleración a del balde.*

b) Si el balde parte del reposo desde la boca del pozo y cae durante 3,00 s antes de golpear el agua, ¿qué distancia recorre en la caída?



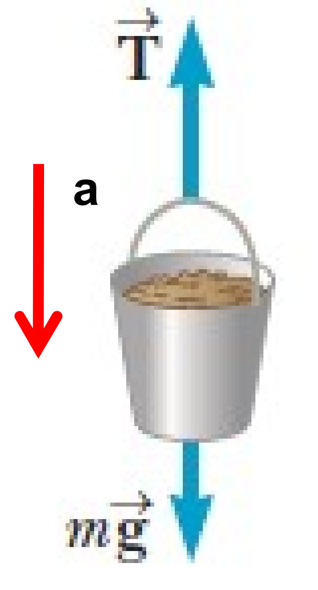
Este problema involucra tres incógnitas: la aceleración *a del balde, la aceleración* angular α *del cilindro y la tensión T en la cuerda, por lo que debemos establer tres ecuaciones:*

1) la segunda ley de Newton aplicada al balde, *ma* $=\Sigma F$;
2) *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$, *y*
3) *la* relación entre las aceleraciones lineal y angular, $a= r\alpha$, que conecta las dinámicas del balde y del cilindro.

El inciso b) es una revisión de cinemática.

Comencemos realizando los DCL del balde y del carrete

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe



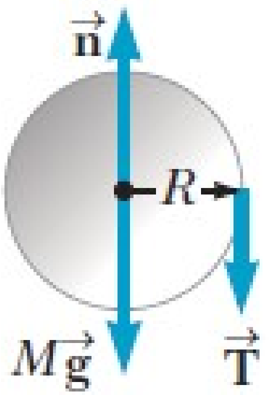
Como el balde está cayendo, la aceleración a es hacia abajo.

Entonces voy a escribir la 2da. Ley de Newton, según el eje vertical, y considerando en sentido positivo hacia abajo:

m.a= m.g – T   (1)

El carrete se encuentra en equilibrio de traslación: la fuerza n equilibra la otras dos fuerzas actuantes: su peso Mg y la tensión T que le ejerce el balde a través de la cuerda.
Por tanto el carrete sólo puede rotar. Por lo que aplicamos *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$
En este caso, la única fuerza que realiza torque, es la tensión T con un brazo de palanca igual a R:

$$I\alpha = T.R$$



Ahora sustituimos: α=a/R y el valor de I correspondiente a un cilindro macizo ($MR^2/2$)

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R} = T.R \qquad \frac{1}{2}Ma = T \quad (2)$$

Sustituyen T en (1) y operando:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma \qquad \left(m + \tfrac{1}{2}M\right)a = mg \qquad a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}g$$

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe

$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} g = \frac{2{,}00}{2{,}00 + \frac{1}{2}(3{,}00)} 9{,}80 = 5{,}60\ m/s^2$$

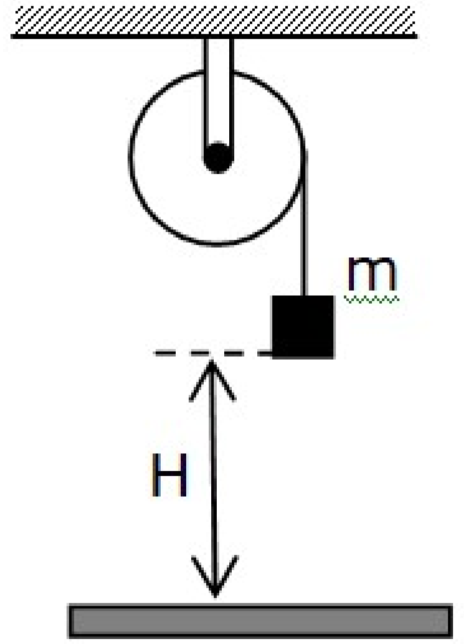
$$T = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{2}(3{,}00)(5{,}60) = 8{,}40\ N$$

b) Para determinar el desplazamiento del balde al cabo de 3,00 segundos de caída, aplico la expresión del desplazamiento para una aceleración constante; teniendo en cuenta que la velocidad inicial es nula.

$$\Delta y = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = \tfrac{1}{2}(5.60\ \mathrm{m/s^2})(3.00\ \mathrm{s})^2$$ = 25,2 m

Ejemplo: Ejercicio 4.15

Examen marzo 2022- a) Un hilo ideal se enrolla sobre una polea de masa **M** y radio **R = 0,210 m**. Con el eje de la polea trabado por un mecanismo de freno, el extremo libre de la cuerda se fija a un cuerpo (puntual) de masa **m = 1,20 kg**, el cual cuelga verticalmente a una altura **H = 1,80 m** del piso (ver figura). En un cierto momento, el eje se destraba y el cuerpo cae arrastrando la cuerda que hace girar a la polea (la cuerda no desliza sobre la polea). Si el cuerpo tarda **1,10 s** en alcanzar el piso, ¿cuánto vale el momento de inercia de la polea, expresándolo en kg.m^2?



La masa cae 1,80 m en 1,10 s, por tanto puedo determinar su aceleración.

$$H = \frac{1}{2} a t^2 \qquad \Rightarrow a = \frac{2H}{t^2} = \frac{2(1{,}80)}{(1{,}10)^2} = 2{,}9752\ m/s^2$$

2da. Ley de Newton sobre la masa m: ma= mg – T
por tanto: T= m(g-a) = 1,20(9,80-2,9752) =8,1898 N

2da. Ley de Newton de rotaciones sobre la polea: $I_o \alpha = T.R$

Pero además se cumple que: $\alpha = \dfrac{a}{R}$

$$I_o \frac{a}{R} = T.R$$

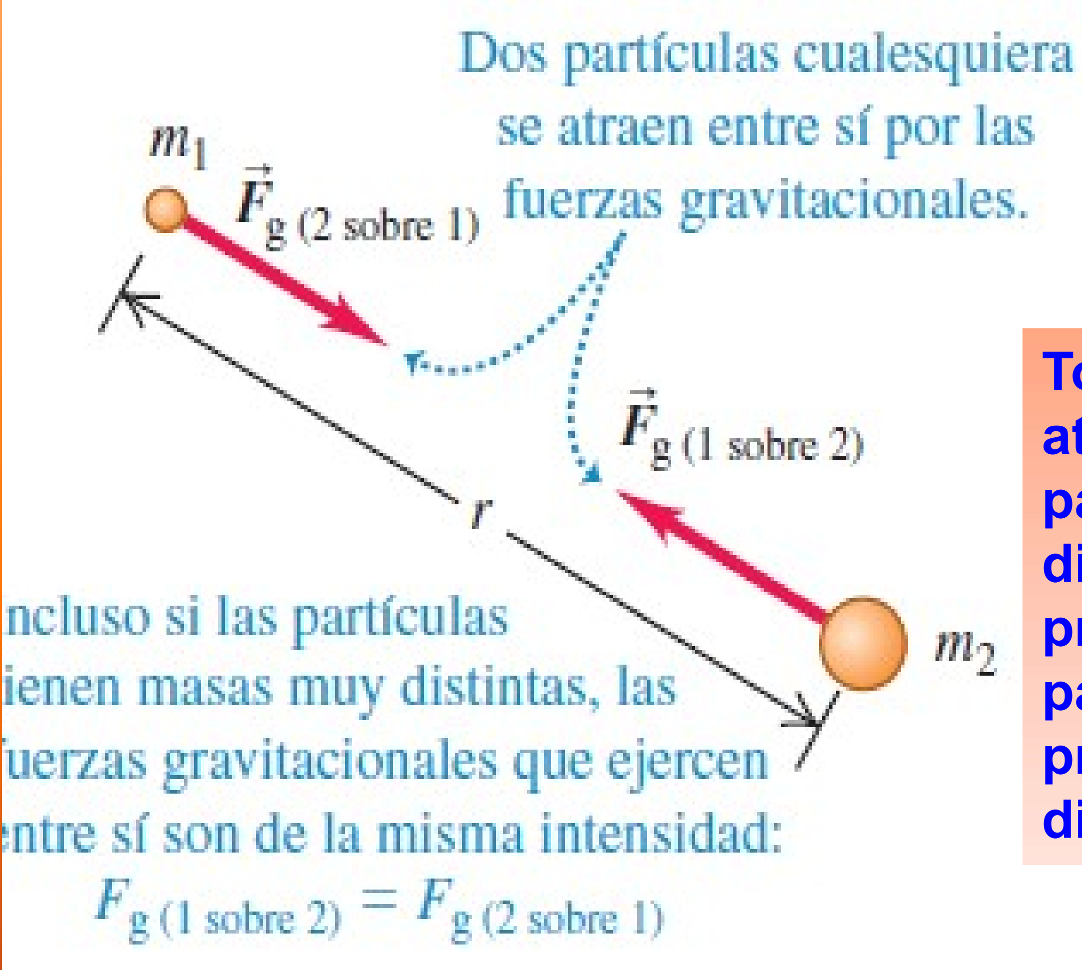
$$I_0 = \frac{TR^2}{a} = \frac{(8{,}1898)(0{,}210)^2}{2{,}9752} = 0{,}121\ kg.m^2$$

I_O =0,121 kg.m^2

12- Gravitación y movimiento de satélites

El **Sputnik 1** (en ruso Спутник-1, que significa *satélite*) lanzado el 4/10/1957por la Unión Soviética fue el primer satélite artificial de la historia.[1] Tenía una masa de lanzamiento de 83,6 kg y un periodo de 96,2 minutos.

La ley de Newton de la gravitación



Newton en 1687 basándose en Kepler, descubre la atracción gravitacional entre dos cuerpos *cualesquiera.* **ley de la gravitación**:

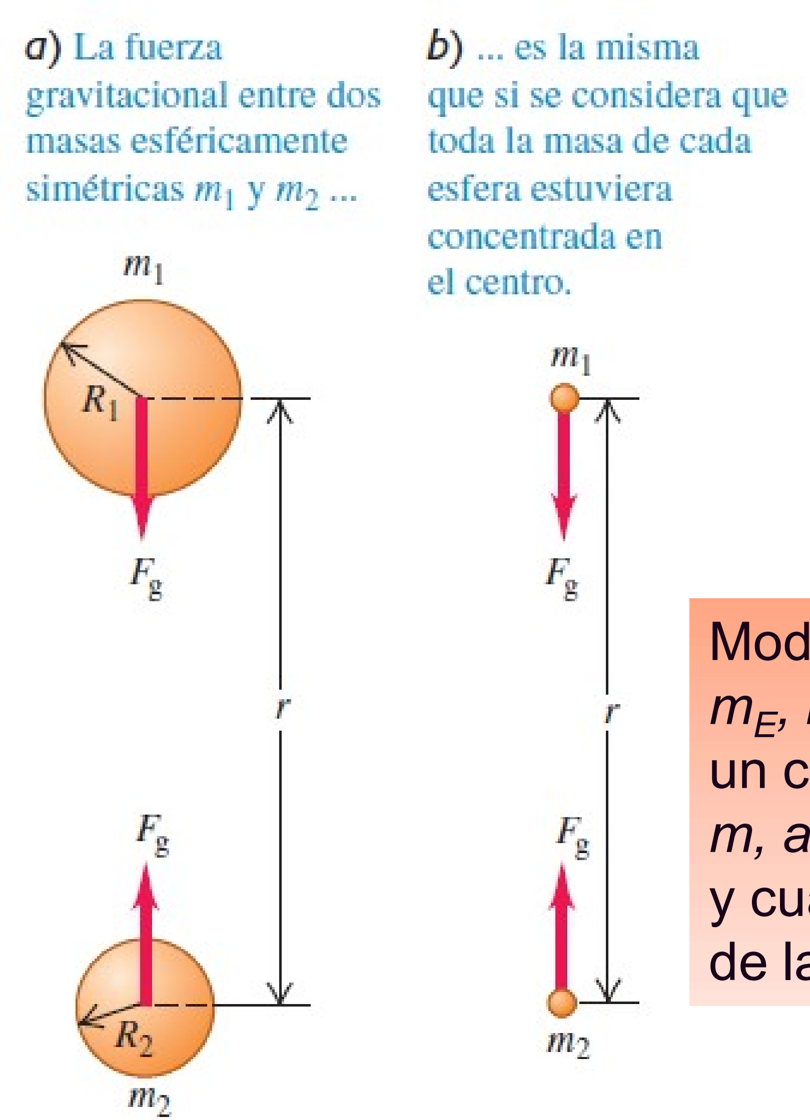
Toda partícula en el Universo atrae a todas las demás partículas con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas de las partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

$$F_g = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Valor aceptado de G = 6,674×10^{-11} N.m^2/kg^2

Fuerzas gravitacionales actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas **(fuerzas centrales)**, y forman un **par acción-reacción**.

Gravitación y cuerpos esféricamente simétricos



A priori la ley de la gravitación se cumple en la interacción entre dos *partículas.*

La interacción gravitacional entre dos cuerpos con distribuciones de masa *esféricamente simétricas (ya sean sólidas o huecas) es la misma que si toda* la masa estuviera concentrada en el centro.

Modelo a la Tierra como una esfera de masa m_E, *la fuerza* que ejerce sobre una partícula o un cuerpo esféricamente simétrico con masa *m, a una* distancia *r entre los centros,* siempre y cuando el cuerpo se encuentre en el exterior de la Tierra.

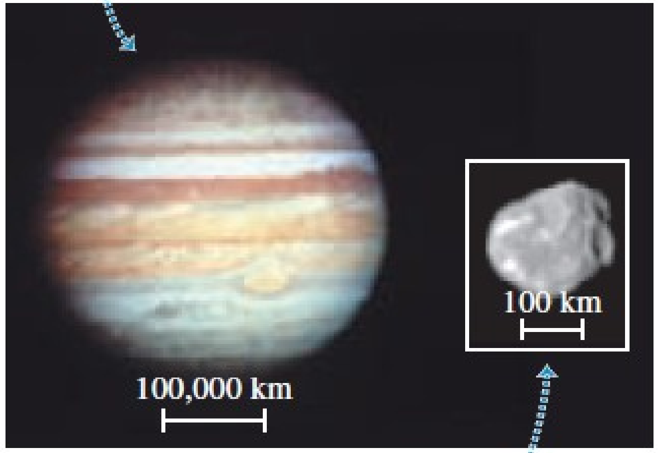
$$F_g = \frac{G m_E m}{r^2}$$

Gravitación y cuerpos esféricamente simétricos

Dentro de la Tierra: si taladro un agujero hasta el centro de la Tierra y mido la fuerza gravitacional sobre un cuerpo a diferentes profundidades, vería que *disminuye hacia el centro, en lugar de aumentar* según $1/r^2$.
Conforme el cuerpo entra a la Tierra (o de otro cuerpo esférico), parte de la masa de la Tierra queda del lado del cuerpo opuesto al centro y tira en la dirección contraria. En el centro exacto de la Tierra, la fuerza gravitacional sobre el cuerpo es cero.

Los cuerpos esféricamente simétricos son casos importantes porque las lunas, los planetas y las estrellas tienden a ser esféricos.
Puesto que todas las partículas de un cuerpo se atraen gravitacionalmente entre sí, tienden a moverse para reducir al mínimo la distancia que las separa.
El resultado es que el cuerpo tiende naturalmente a adoptar una forma esférica,

La masa de Júpiter es muy grande (1.90×10^{27} kg), así que la atracción gravitacional mutua de sus partes ha hecho que el planeta adquiera una forma casi esférica.



Amaltea, una de las lunas de Júpiter, tiene una masa relativamente insignificante (7.17×10^{18} kg, alrededor de 3.8×10^{-9} la masa de Júpiter) y su atracción gravitacional mutua es débil, por lo que tiene una forma irregular.

PREGUNTA RÁPIDA 1

Saturno tiene aprox. 100 veces la masa de la Tierra y está alejado del Sol casi 10 veces más que nuestro planeta. En comparación con la aceleración de la Tierra causada por la atracción gravitacional solar,

¿qué tan grande es la aceleración de Saturno debida a la gravitación solar, es decir la aceleración centrípeta respecto al Sol?

i. 100 veces mayor;

ii. 10 veces mayor;

iii. es igual;

iv. 1/10 ;

v. 1/100

Respuesta: v. 1/100. Si bien las fuerzas que experimentan ambos planetas son iguales, la aceleración es igual a dicha fuerza sobre la masa del planeta.