

Cinemática de los choques

En los choques de dos partículas el movimiento relativo entre ellas está regido por la fuerza responsable de la interacción. Entonces, si conocemos la forma de la misma, podemos calcular (numéricamente al menos) la evolución "exacta" (clásicamente) de las partículas. Sin embargo, aunque no conozcamos la interacción, podemos utilizar la conservación del momento (y la energía, si es que esta se conserva en el choque) para concluir ciertos aspectos del movimiento.

Conociendo el estado inicial "estado de entrada" (in state) dado por el estado cuando las partículas aún no interactúan y aplicando leyes de conservación podemos obtener información relevante acerca del estado final "estado de salida" (out state) en el cual las partículas ya se han alejado luego de interactuar.

Vamos a diferenciar entre 2 tipos de choques:

- Choque elástico $\rightarrow$ la energía mecánica se conserva
- Choque inelástico $\rightarrow$ la energía mecánica no se conserva (se invierte en la deformación de los cuerpos, energía térmica, etc.)

En general en los choques las partículas se encuentran en condiciones generales de movimiento. Sin embargo, nos vamos a centrar en 2 sistemas de referencia:

- Referencial del laboratorio (RL) $\rightarrow$ una de las partículas (objetivo) está en reposo mientras la otra se mueve (proyectil)
- Referencial del centro de masas (RCM) $\rightarrow$ referencial en el que el momento lineal total es nulo $\vec{P}_{tot} = 0$ (En genl. las cuentas son más simples en éste).

Cuando hablamos de la energía mecánica en los estados **in** y **out** en realidad, debido a que las partículas ya no interactúan, su energía mecánica es energía cinética.

Uno/a podría preguntarse ¿Cuál es la máxima energía que puede "perdersé" (transformarse) en un choque?

Si nos colocamos en el RCM podemos ver que la conservación del momento nos permite poner $\vec{p}_{1F} = \vec{p}_{2F} = 0$ ya que la restricción es $\vec{p}_{tot} = 0$. Esto no es otra cosa que tener a las partículas en reposo en el estado final. Lo cual quiere decir que se perdió toda la energía cinética disponible:

$$K_i^{(RCM)} = \frac{m_1 (\vec{v}_1^{(RCM)})^2}{2} + \frac{m_2 (\vec{v}_2^{(RCM)})^2}{2}, \quad K_F^{(RCM)} = 0$$

Cualquier otro estado final compatible con $\vec{p}_{tot} = 0$ implicaría $K_F^{(RCM)} > 0$. Esto quiere decir, también, que desde cualquier otro referencial la mayor pérdida energética se da cuando las partículas quedan unidas luego del choque. Llamamos a éste un choque totalmente inelástico.

En el referencial del laboratorio el choque totalmente inelástico implica la siguiente pérdida de energía.



$$K_i^{(RL)} = \frac{m_1 (\vec{v}_1^{(RL)})^2}{2}$$

$$K_F^{(RL)} = \frac{(m_1 + m_2) (\vec{v}_F^{(RL)})^2}{2}$$

Por la conservación del momento es

$$\vec{p}_{tot} = m_1 \vec{v}_1^{(RL)} = (m_1 + m_2) \vec{v}_F^{(RL)} \Rightarrow \vec{v}_F^{(RL)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1^{(RL)}$$

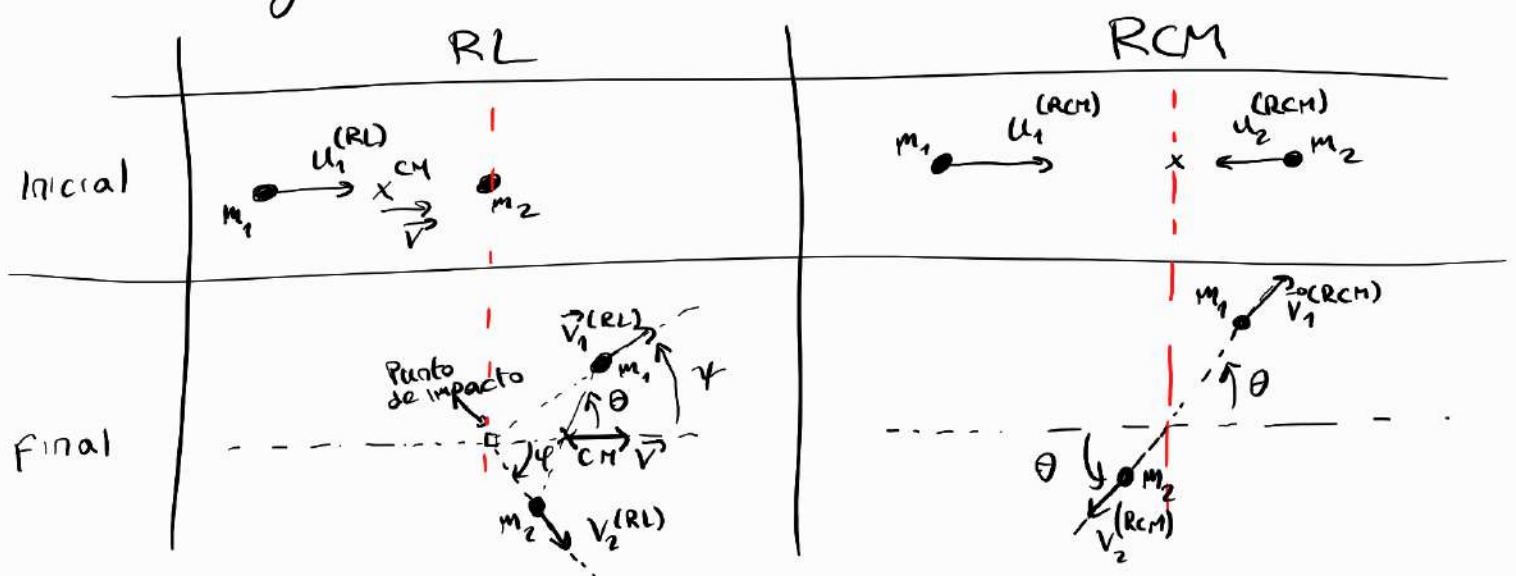
y por lo tanto será $\Delta K^{(RL)} = \frac{m_1 (\vec{v}_1^{(RL)})^2}{2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1 \right) = - K_i^{(RL)} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

Choques elásticos

Centremonos ahora en los choques elásticos y, dado que las cuentas son más simples en el referencial del centro de masas, conectemos las cantidades del referencial del laboratorio (situación más usual) con las del referencial del centro de masas.

Definamos la siguiente nomenclatura para evitar densificar la notación:

- * $m_1 \rightarrow$ masa de la partícula proyectil (en el RL)
- * $m_2 \rightarrow$ masa de la partícula objetivo (en el RL)
- * $M \rightarrow$ masa total del sistema $m_1 + m_2$.
- * $\vec{u}_i^{(RL)} \rightarrow$ velocidad inicial de la partícula de masa m_i , en el RL.
- * $\vec{u}_i^{(RCM)} \rightarrow$ velocidad inicial de la partícula de masa m_i , en el RCM.
- * $\vec{v}_i^{(RL)} \rightarrow$ velocidad final de la partícula de masa m_i , en el RL.
- * $\vec{v}_i^{(RCM)} \rightarrow$ velocidad final de la partícula de masa m_i , en el RCM.
- * $K_0^{(RL)} \rightarrow$ energía cinética total (inicial, pero da igual si es elástico) en el RL.
- * $K_0^{(RCM)} \rightarrow$ energía cinética total (inicial, pero da igual si es elástico) en el RCM.
- * $K_i^{(RL)} \rightarrow$ energía cinética final de la partícula de masa m_i , en el RL.
- * $K_i^{(RCM)} \rightarrow$ energía cinética final de la partícula de masa m_i , en el RCM.
- * $\vec{V} \rightarrow$ velocidad del centro de masas en el RL.
- * $\psi \rightarrow$ ángulo de desviación de la partícula m_1 en el RL.
- * $\varphi \rightarrow$ ángulo de desviación de la partícula m_2 en el RL.
- * $\theta \rightarrow$ ángulo de desviación de las partículas en el RCM.



En los choques elásticos siempre tendremos que la energía se conserva y por lo tanto será: $K_0 = K_F = K_1 + K_2$, $M = m_1 + m_2$.

Además, la velocidad del centro de masas es

$$m_1 \vec{u}_1^{(RL)} + m_2 \vec{u}_2^{(RL)} = M \vec{V} \quad \text{pero dado que } \vec{u}_2^{(RL)} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1}{M} \vec{u}_1$$

Si queremos ir de un referencial en que m_2 está en reposo a otro donde m_2 se mueve con velocidad $\vec{u}_2^{(RCM)}$, debemos hacer la transformación $\vec{u}_2^{(RL)} = \vec{u}_2^{(RCM)} + \vec{V}_{RCM/RL}$ (no hay rotación relativa entre RL y RCM: $\vec{\omega} = 0$)

pero $\vec{V}_{RCM/RL} = \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{u}_2^{(RCM)} = -\vec{V} = -\frac{m_1}{M} \vec{u}_1^{(RL)}} \quad (*)$

de igual forma: $\boxed{\vec{u}_1^{(RCM)} = \vec{u}_1^{(RL)} - \vec{V} = \frac{m_2}{M} \vec{u}_1^{(RL)}} \quad (**)$

Dado que la energía se conserva, debe ser:

$$\boxed{|\vec{u}_1^{(RCM)}| = |\vec{V}_1^{(RCM)}| \quad \text{y} \quad |\vec{u}_2^{(RCM)}| = |\vec{V}_2^{(RCM)}|} \quad (**)$$

Ejercicio

Definamos $\hat{n}$ como la dirección perpendicular a $\hat{v}$ pero en el plano de la colisión. Si proyectamos las velocidades finales en las direcciones $\hat{v}$ y $\hat{n}$ es

$$\left[\vec{V}_1^{(RL)} = \vec{V}_1^{(RCM)} + \vec{V} \right] \cdot \hat{v} \rightarrow V_1^{(RL)} \cos \psi = V_1^{(RCM)} \cos \theta + V = \frac{m_2}{M} u_1^{(RL)} \cos \theta + \frac{m_1}{M} u_1^{(RL)} \quad (I)$$

$$\left[\vec{V}_2^{(RL)} = \vec{V}_2^{(RCM)} + \vec{V} \right] \cdot \hat{v} \rightarrow V_2^{(RL)} \cos \varphi = -V_2^{(RCM)} \cos \theta + V = -\frac{m_1}{M} u_1^{(RL)} \cos \theta + \frac{m_1}{M} u_1^{(RL)} \quad (II)$$

$$\left[\vec{V}_1^{(RL)} = \vec{V}_1^{(RCM)} + \vec{V} \right] \cdot \hat{n} \rightarrow V_1^{(RL)} \sin \psi = V_1^{(RCM)} \sin \theta = \frac{m_2}{M} u_1^{(RL)} \cos \theta \quad (III)$$

$$\left[\vec{V}_2^{(RL)} = \vec{V}_2^{(RCM)} + \vec{V} \right] \cdot \hat{n} \rightarrow -V_2^{(RL)} \sin \varphi = -V_2^{(RCM)} \sin \theta = -\frac{m_1}{M} u_1^{(RL)} \sin \theta \quad (IV)$$

Haciendo: (III)/(I) es $\text{tg } \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}}$

(IV)/(II) es $\text{tg } \varphi = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$

observemos 3 situaciones

- si $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \psi = 0$

Es decir, m_1 no altera su trayectoria

- si $m_1 < m_2 \Rightarrow \psi = \theta$

Es decir, m_2 no se entera del choque

- si $m_1 = m_2 \Rightarrow \psi = \frac{\theta}{2}$

Es decir, si $m_1 = m_2$ no hay dispersiones con ángulos mayores a $\psi = \frac{\pi}{2}$! ($0 < \theta < \pi$)

Prueba:

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) = \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \cos \theta + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

y por lo tanto será $\text{tg} \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = \text{tg} \frac{\theta}{2}$

De forma semejante podemos transformar $\text{tg} \varphi$ en:

$$\text{tg} \varphi = \frac{1}{\text{tg}(\theta/2)} = \cot \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})}$$

$$\Rightarrow \text{tg} \varphi = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

En el caso particular en que $m_1 = m_2$ es $\psi = \frac{\theta}{2}$
y por lo tanto $\left| \varphi + \psi = \frac{\pi}{2} \right|$ Siempre forman 90° !!

