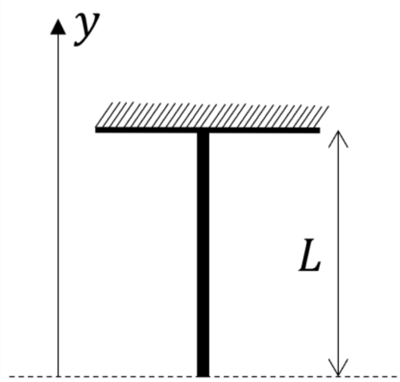
PRIMER PARCIAL ONDAS 2023

11/05/2023

Ejercicio 1.(25 pts)



Considere una cuerda de largo L y densidad lineal de masa ρ suspendida en posición vertical como se muestra en la figura. El eje y se mide desde el extremo inferior de la cuerda y su sentido positivo es hacia arriba como se indica. **(a)(5 pts)** Cuando la cuerda está en reposo, hallar una expresión para la tensión en la cuerda como función de la posición y. **(b)(5 pts)** Suponiendo pequeñas oscilaciones, mostrar que la ecuación de movimiento en la dirección horizontal x está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\vec{T}\right|\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

donde $\left|\vec{T}\right|$ es la tensión en la cuerda hallada en la parte (a). **(c)(15 pts)** Mostrar que los modos normales de vibración están dados por la siguiente expresión:

$$x_n(y,t) = A_n J_0\left(2\omega_n\sqrt{\frac{y}{g}}\right)\cos(\omega_n t + \phi_n)$$

y hallar las frecuencias de los modos normales ω_n.

Sugerencia: Resolver la ecuación de movimiento mediante separación de variables escribiendo $x(y,t) = Y(y)\tau(t)$. Luego, para resolver la ecuación diferencial de la parte espacial $Y(y)$ realizar el cambio de variable $\eta = 2\omega\sqrt{y/g}$, siendo $-\omega^2$ la constante de separación.

Ejercicio 2 (25 pts.)

Considere una onda acústica armónica plana que se propaga en aire en condiciones estándar dada por:

$$P'(\vec{r},t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Si el nivel de intensidad de la onda es de 70 dB (@10^{-12} W/m^2) **(a)(5 pts)** Hallar la amplitud de presión acústica A. **(b)(5 pts)** Hallar el número de Mach $|\vec{u}|/c$. **(c)(5 pts)** Mostrar que el potencial de velocidades se puede escribir como $\phi(\vec{r},t) = \phi_0(\omega)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \pi/2)}$ y hallar explícitamente $\phi_0(\omega)$. **(d)(10 pts.)** El resultado anterior implica que $\lim_{\omega\to 0} \phi_0(\omega) = \infty$. ¿Contradice esto la hipótesis de pequeñas amplitudes que conduce a la ecuación de ondas linealizada? Justifique su respuesta.

DATOS Y FÓRMULAS ÚTILES

- El nivel de intensidad acústica se define como:

$$NI = 10\log_{10}\left(\frac{\langle I\rangle}{\langle I\rangle_{ref}}\right)$$

- La intensidad acústica media para una onda armónica plana está dada por:

$$\langle I\rangle = \frac{1}{2}\frac{A^2}{z_e}$$

  donde A es la amplitud de presión acústica y z_e la impedancia acústica característica del fluido.
- La impedancia acústica característica de un fluido está dada por $z_e = \rho_0 c$
- La densidad y velocidad del sonido en aire en condiciones estándar valen $\rho_0 = 1{,}2\ kg/m^3$ y $c = 340\ m/s$ respectivamente
- La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

  tiene por solución

$$y(x) = aJ_0(x) + bN_0(x)$$

  donde J_0 es la función de Bessel de orden cero y N_0 es la función de Neumann o función de Bessel de segunda especie de orden cero.