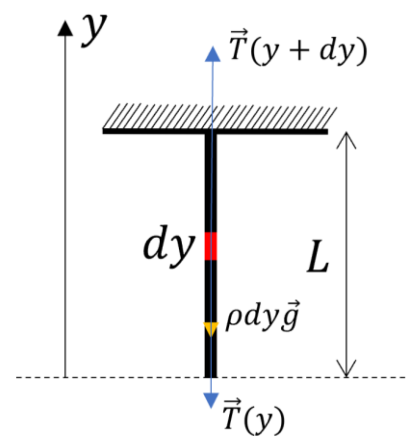
Ejercicio 1



(a) Consideremos un elemento de la cuerda de largo dy en una posición arbitraria y marcado en rojo en la figura. Como la cuerda está en equilibrio, la suma de fuerzas que actúan sobre este elemento debe ser nula:

$$\Rightarrow \left[\left|\vec{T}(y+dy)\right| - \rho dyg - \left|\vec{T}(y)\right|\right]\hat{\mathbf{j}} = 0$$

$$\Rightarrow \left|\vec{T}(y+dy)\right| - \left|\vec{T}(y)\right| = \rho g dy$$

$$\Rightarrow \frac{d\left|\vec{T}(y)\right|}{dy} = \rho g$$

Integrando esta ecuación llegamos a:

$$\left|\vec{T}(y)\right| = \rho g y + a$$

donde a es una constante. Ahora sabemos que en $y = 0$ la tensión es nula pues por debajo de ese punto ya no hay cuerda.

$$\Rightarrow \left|\vec{T}(0)\right| = a = 0$$

Finalmente tenemos:

$$\left|\vec{T}(y)\right| = \rho g y$$

(b) Considerando ahora la posibilidad de que la cuerda tenga movimiento horizontal cuya posición llamaremos $x(y,t)$, la ecuación de movimiento en esta dirección está dada por:

$$\left|\vec{T}(y+dy)\right|\sin(\theta(y+dy)) - \left|\vec{T}(y)\right|\sin\big(\theta(y)\big) = \rho ds\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

donde $\theta(y)$ es el ángulo que forma la cuerda con el eje y en cada punto. Como dy es un elemento diferencial de cuerda, el lado izquierdo de esta igualdad lo podemos expresar como:

$$\left|\vec{T}(y+dy)\right|\sin(\theta(y+dy)) - \left|\vec{T}(y)\right|\sin\big(\theta(y)\big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\left|\vec{T}(y)\right|\sin\big(\theta(y)\big)\Big)dy$$

Si asumimos pequeñas oscilaciones de manera que $\sin\big(\theta(y)\big) \ll 1$ tenemos:

$$\sin\big(\theta(y)\big) \cong \tan\big(\theta(y)\big) = \frac{\partial x}{\partial y} \;\; ; ds \;\cong dy$$

Finalmente, la ecuación de movimiento bajo esta aproximación queda dada por:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\vec{T}(y)\right|\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

(c) La ecuación de movimiento hallada en la parte anterior la podemos escribir como:

$$\left|\vec{T}(y)\right|\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial\left|\vec{T}(y)\right|}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

Para hallar la solución de modos normales, escribimos el desplazamiento horizontal como el producto de dos funciones:

$$x(y,t) = Y(y)\tau(t)$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento encontramos:

$$\left|\vec{T}(y)\right|\tau(t)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{d\left|\vec{T}(y)\right|}{dy}\tau(t)\frac{dY(y)}{dy} = \rho Y(y)\frac{d^2\tau(t)}{dt^2}$$

Dividiendo esta ecuación entre $x(y,t)$ llegamos a:

$$\frac{\left|\vec{T}(y)\right|}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d\left|\vec{T}(y)\right|}{dy}\frac{dY(y)}{dy} = \frac{\rho}{\tau(t)}\frac{d^2\tau(t)}{dt^2}$$

Ahora sustituimos la tensión hallada en la parte (a):

$$\frac{\rho g y}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{\rho g}{Y}\frac{dY}{dy} = \frac{\rho}{\tau(t)}\frac{d^2\tau(t)}{dt^2}$$

Tenemos del lado izquierdo una función que depende únicamente de la variable espacial y, mientras del lado derecho una función que depende únicamente del tiempo. Para poder cumplir la igualdad ambas funciones deben igualarse a la misma constante que llamaremos $-\omega^2$. Tenemos entonces para la función temporal $\tau(t)$:

$$\frac{1}{\tau(t)}\frac{d^2\tau(t)}{dt^2} = -\omega^2$$

que es la ecuación diferencial que representa el movimiento armónico simple con frecuencia angular ω:

$$\Rightarrow \tau(t) = a_1\cos(\omega t + \phi)$$

La ecuación diferencial para la función de la coordenada espacial y queda:

$$y\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{dY}{dy} + \frac{\omega^2}{g}Y = 0$$

Hacemos ahora el cambio de variable $\eta = 2\omega\sqrt{y/g}$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dy} = \frac{dY}{d\eta}\frac{d\eta}{dy} = \frac{dY}{d\eta}\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

Tenemos que:

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{g}}{2\omega}\eta \Rightarrow y = \frac{g}{4\omega^2}\eta^2$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dy} = \frac{2\omega^2}{g}\frac{1}{\eta}\frac{dY}{d\eta}$$

Por otro lado:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{dY}{dy}\right)\frac{d\eta}{dy} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{2\omega^2}{g}\frac{1}{\eta}\frac{dY}{d\eta}\right)\frac{2\omega^2}{g}\frac{1}{\eta}$$

$$= \frac{4\omega^4}{g^2}\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{d^2Y}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta^2}\frac{dY}{d\eta}\right)$$

Finalmente llegamos a:

$$y\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{dY}{dy}+\frac{\omega^2}{g}Y=\frac{g}{4\omega^2}\eta^2\frac{4\omega^4}{g^2}\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{d^2Y}{d\eta^2}-\frac{1}{\eta^2}\frac{dY}{d\eta}\right)+\frac{2\omega^2}{g}\frac{1}{\eta}\frac{dY}{d\eta}+\frac{\omega^2}{g}Y$$
$$=\frac{\omega^2}{g}\left[\frac{d^2Y}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{dY}{d\eta}+Y\right]=0$$

La ecuación diferencial entre paréntesis recto es la que define las funciones de Bessel de orden cero.

$$\Rightarrow Y(\eta)=a_2J_0(\eta)+bN_0(\eta)=a_2J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{y}{g}}\right)+bN_0\left(2\omega\sqrt{\frac{y}{g}}\right)$$

Para hallar las frecuencias de los modos normales debemos imponer las condiciones de borde. El desplazamiento horizontal en $y=0$ es finito. Por lo tanto, tenemos $b=0$. Por otro lado, el borde en $y=L$ es fijo y por lo tanto:

$$J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{L}{g}}\right)=0\Rightarrow 2\omega\sqrt{\frac{L}{g}}=j_{0n}\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{j_{0n}}{2}$$

Finalmente tenemos que los modos normales están dados por:

$$x_n(y,t)=A_nJ_0\left(2\omega_n\sqrt{\frac{y}{g}}\right)\cos(\omega_n t+\phi_n)$$

donde $A_n=a_1a_2^{(n)}$.

Ejercicio 2.

(a) Tenemos que

$$10\log_{10}\left(\frac{\langle I\rangle}{10^{-12}}\right)=70$$
$$\Rightarrow \langle I\rangle=10^{-12}10^{7}\ W/m^2=10^{-5}\ W/m^2$$

Por otro lado, tenemos para una onda armónica plana que:

$$\langle I\rangle=\frac{1}{2}\frac{A^2}{z_e}=\frac{1}{2}\frac{A^2}{\rho_0 c}$$
$$\Rightarrow A=\sqrt{2\rho_0 c\langle I\rangle}=\sqrt{2\ 1{,}2\ 340\ 10^{-5}}\cong 9{,}0\times 10^{-2}\ Pa$$

(b) La velocidad particular $\vec{u}$ y la presión acústica P' se relacionan a través de la ecuación de Euler linealizada:

$$\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=-\nabla P'$$

Para una onda armónica plana tenemos:

$$i\omega\rho_0\vec{u} = -\nabla\left(Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) = i\vec{k}Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{kA}{\omega\rho_0}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\hat{\mathbf{n}}$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = \vec{k}/k$. Teniendo en cuenta la relación $\omega = ck$ tenemos:

$$|\vec{u}| = \frac{A}{\rho_0 c}$$

y por lo tanto:

$$M = \frac{|\vec{u}|}{c} = \frac{A}{\rho_0 c^2} \cong 6{,}5 \times 10^{-7}$$

(c) El potencial de velocidades ϕ se define de manera que $\vec{u} = \nabla\phi$. De la ecuación de Euler linealizada tenemos que:

$$i\omega\rho_0\nabla\phi = -\nabla P'$$

$$\Rightarrow \nabla(i\omega\rho_0\phi + P') = 0$$

De manera que la cantidad entre paréntesis es una constante en términos espaciales. Podemos redefinir ϕ de manera que esa constante sea nula. Tenemos entonces:

$$\phi = -\frac{P'}{i\omega\rho_0} = i\frac{P'}{\omega\rho_0}$$

Podemos escribir $i = e^{i\pi/2}$ y tenemos $P'(\vec{r},t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{A}{\omega\rho_0}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \pi/2)} = \phi_0(\omega)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \pi/2)}$$

$$\Rightarrow \phi_0(\omega) = \frac{A}{\omega\rho_0}$$

(d) Tenemos que $A \cong 9{,}0 \times 10^{-2}\ Pa$ y $\rho_0 = 1{,}2\ kg/m^3$ son cantidades finitas y por lo tanto ϕ_0 es inversamente proporcional a ω de manera que:

$$\lim_{\omega\to 0}\phi_0(\omega) = \infty$$

Es decir que la amplitud del potencial de velocidades puede ser muy grande a bajas frecuencias. Sin embargo, debemos tener en cuenta que el potencial de velocidades en sí no juega ningún papel en la ecuación de ondas sino su gradiente:

$$\nabla\phi = -i\vec{k}\frac{A}{\omega\rho_0}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \pi/2)}$$

Usando la relación $\omega = ck$ tenemos que $|\nabla\phi|$ es independiente de la frecuencia y de hecho

$$\frac{|\nabla\phi|}{c} = M \ll 1$$

Podemos concluir entonces que la dependencia $\phi_0(\omega)$ no contradice la hipótesis de pequeñas amplitudes que permite obtener la ecuación de ondas linealizada.