(10) Dentro de una nave espacial, que se encuentra lejos de cualquier campo gravitatorio, se realiza el siguiente experimento: se lanza una bala por una guía AB a 45° con la trayectoria de la nave. Se observa que la posición $x(t)$ de la bala es $x(t) = Ct^2$.

La nave avanza con velocidad v_0 constante alejándose de la tierra.

a) Hallar la energía cinética T de la bala para un observador dentro de la nave y un observador en la tierra.

b) Hallar la potencia neta $P(t)$ que se ejerce sobre la bala para cada uno de los observadores.

c) ¿Son las cantidades medidas en uno y otro sistema iguales? ¿Deberían serlo? Dado que ambos sistemas son inerciales ¿A qué se deben las diferencias que puedan aparecer entre uno y otro?

Nota: Una forma de intentar responder es obse ervar a qué es igual la diferencia entre la potencia "relativa" y la "absoluta".

Respuestas:

a) $T_R = 2mc^2t^2$, $T_A = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + 2\sqrt{2}\,v_0ct + 4c^2t^2\right)$

b) $P_R = 4mc^2t$, $P_A = m\left(\sqrt{2}\,v_0c + 4c^2t\right)$

Solución

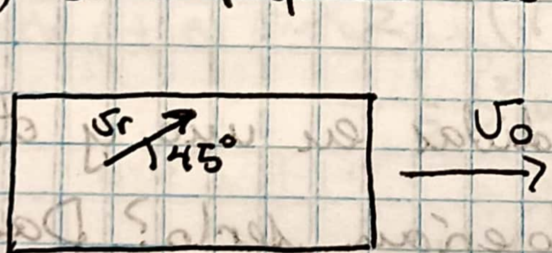
a) Energía cinética T en el referencial de la nave:

velocidad con respecto a la nave

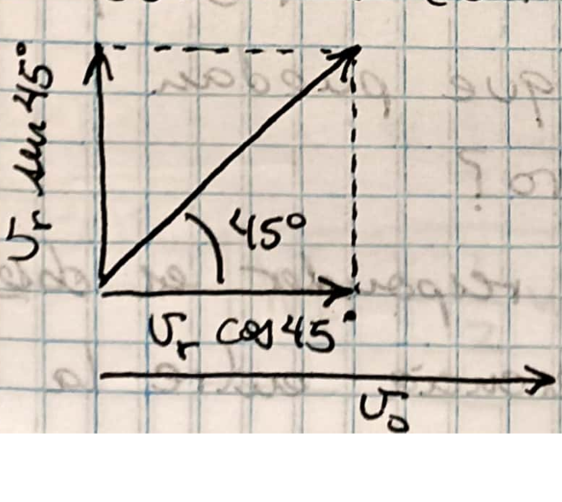
$$\Rightarrow \quad v_R(t) = \dot{x}(t) = 2ct \Rightarrow T_R = \frac{1}{2}mv_R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_R = 2mc^2t^2}$$

b) Con respecto a la tierra tenemos:



El módulo de la velocidad se calcula con sus componentes.



$$\vec{v}_A = \left(v_0 + v_r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\imath} + \left(v_r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\jmath} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_r = 2ct \\ \operatorname{sen} 45 \\ = \cos 45 \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = (v_0 + \sqrt{2}\,ct)\,\hat{\imath} + (\sqrt{2}\,ct)\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow v_A^2 = (v_0 + \sqrt{2}\,ct)^2 + (\sqrt{2}\,ct)^2$$

$$= v_0^2 + 2\sqrt{2}\,v_0 ct + 2c^2t^2 + 2c^2t^2$$

$$= v_0^2 + 2\sqrt{2}\,v_0 ct + 4c^2t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_R = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + 2\sqrt{2}\,v_0 ct + 4c^2t^2\right)}$$

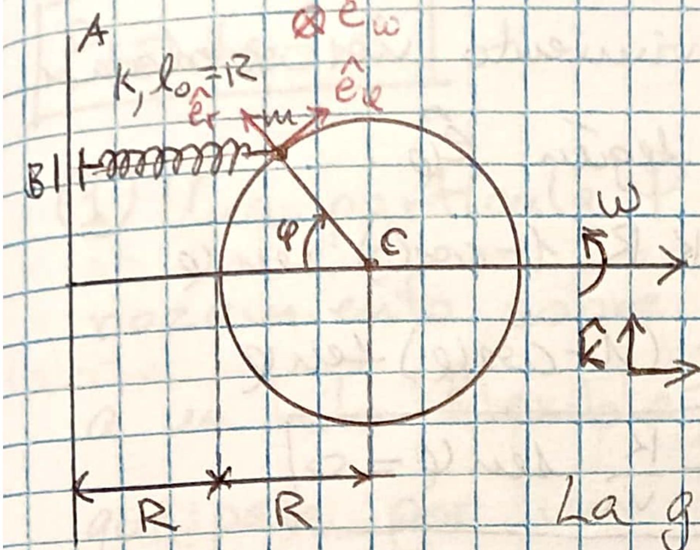
b) $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dT}{dt} \Rightarrow$

$$\boxed{P_R = \frac{dT_R}{dt} = 4mc^2t}$$ de igual forma:

$$P_A = \frac{dT_A}{dt} = \frac{1}{2} m \left(2\sqrt{2}\,v_0 c + 8c^2t\right)$$

$$\boxed{P_A = m\left(\sqrt{2}\,v_0 c + 4c^2t\right)}$$

c) La energía cinética y la potencia, a pesar de ser cantidades escalares, están definidas a través de la velocidad, que es un concepto relativo al sistema de referencia. Para interpretar la diferencia entre la potencia "relativa" y "absoluta" debemos estudiar el concepto de potencia, trabajo y energía sobre un



a) Posición de la masa:

$\vec{x} = (R - R\cos\varphi)\,\hat{\imath}$

$\vec{F}_e = -K\vec{x}$

$= -KR(1-\cos\varphi)\,\hat{\imath}$

$= F_e\cos\varphi\,\hat{e}_r - F_e \operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_\varphi$

La guía ejercerá una fuerza normal sobre la masa: $\vec{N} = N_r\,\hat{e}_r + N_\omega\,\hat{e}_\omega$

Vamos a aplicar el teorema de Coriolis para la aceleración total: $\vec{a} = \vec{a^i} + \vec{a_T} + \vec{a_c}$ tomando el referencial que rota con el aro y con centro en éste como el sistema de transporte.

Tenemos entonces:

$\vec{a^i} = -R\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_r + R\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$

$\vec{a_T} = -R\operatorname{sen}\varphi\,\omega^2\,\hat{k} = -R\operatorname{sen}\varphi\,\omega^2(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_r + \cos\varphi\,\hat{e}_\varphi)$

$\vec{a_c} = 2\vec{\omega}\times\vec{v^i} = 2\omega\,\hat{\imath}\times R\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = 2R\omega\dot{\varphi}\cos\varphi(-\hat{e}_\omega)$

Ahora aplicamos la 2 ley de Newton:

$m\vec{a} = \sum\vec{F}_{ext} = \vec{N} + \vec{F}_e$

$m[-R\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_r + \underline{R\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi} - \underline{R\operatorname{sen}\varphi\,\omega^2}(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_r + \underline{\cos\varphi}\,\hat{e}_\varphi)$

$- 2R\omega\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{e}_\omega] = N_r\,\hat{e}_r + N_\omega\,\hat{e}_\omega$

$+ KR(1-\cos\varphi)\cos\varphi\,\hat{e}_r$

$- \underline{KR(1-\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi}\,\hat{e}_\varphi$

$\boxed{\text{Ejercicio 8}}$

Para obtener la ecuación de movimiento nos quedamos solamente con las componentes según $\hat{e}_\varphi$:

$$m(R\ddot{\varphi} - \omega^2 R \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi) = -KR(1-\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\ddot{\varphi} - \omega^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = -\frac{K}{m}(1-\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} - \left(\frac{K}{m}+\omega^2\right)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{K}{m}\operatorname{sen}\varphi = 0}$$

b) Para encontrar los puntos de equilibrio relativo buscamos $\ddot{\varphi}=0 \Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\varphi\left[\frac{K}{m} - \left(\frac{K}{m}+\omega^2\right)\cos\varphi\right]}_{U(\varphi)} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} ① \operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi \\ ② \frac{K}{m} - \left(\frac{K}{m}+\omega^2\right)\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{K/m}{K/m+\omega^2}\right) \end{cases}$$

c) Para evaluar la estabilidad analizamos el signo de

$$dU(\varphi)/d\varphi = \frac{K}{m}\cos\varphi - \left(\frac{K}{m}+\omega^2\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{K}{m}+\omega^2\right)\operatorname{sen}^2\varphi$$

$$\left.\frac{dU(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{K}{m} - \left(\frac{K}{m}+\omega^2\right) = -\omega^2 < 0 \longrightarrow \text{inestable}$$

(igual para $\varphi=\pi$)

Reemplazando $\varphi = \arccos\left(\frac{K/m}{K/m+\omega^2}\right)$ en $\frac{dU(\varphi)}{d\varphi}$ y usando $\operatorname{sen}^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$ se evalúa que estos son puntos de equilibrio estables.

Aclaración: $U(\varphi)$ no es el potencial, pero nos sirve para calcular la estabilidad de los puntos de equilibrio

Escaneado con CamScanner