Nombre:	CI:

PRUEBA PARCIAL - MAYO 2023

Ejercicio 1

- 1) Calcular la probabilidad de que, en $2n$ ensayos Bernoulli independientes se obtengan únicamente n éxitos en los ensayos con número par, si la probabilidad de éxito en cada ensayo es p. Denotemos por A a dicho suceso.
- 2) Supongamos ahora $n = 8$ y sea B el suceso "los resultados en los ensayos 4 y 6 son iguales. Calcular $P(A|B)$.

Ejercicio 2

Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribuciones exponenciales de parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- 1) Probar que $Y = \text{mín}_{1\leq j\leq n} X_j$ tiene distribución exponencial.
- 2) Sea $Z = \text{mín}_{2\leq j\leq n} X_j$. Calcular $\mathbb{E}(X_1 Z)$.

Solución

Ejercicio 1

- 1) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\{(F, E, F, E, \dots, F, E)\}\right) = p^n(1-p)^n$.
- 2) $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, siendo:
  - $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\{(-,-,-,E,-,E,-,-,\dots,-),(-,-,-,F,-,F,-,-,\dots,-)\}\right) = p^2 + (1-p)^2$,
  - $A \cap B = A$, luego $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) = p^8(1-p)^8$

  Luego, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{p^8(1-p)^8}{p^2+(1-p)^2}$.

Ejercicio 2 Recordar que si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ y $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

- 1)

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\left(\underset{1\leq i\leq n}{\text{mín}} X_i \leq x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\underset{1\leq i\leq n}{\text{mín}} X_i > x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_i > x,\ \forall i\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x; X_2 > x; \dots; X_n > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x)\dots\mathbb{P}(X_n > x) \\
&= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x))\dots(1 - F_{X_n}(x)) = 1 - e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}\dots e^{-\lambda_n x} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x}
\end{aligned}$$

  Luego, $Y \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$.

- 2) Por la parte anterior, $Z \sim Exp(\lambda_2 + \dots + \lambda_n)$ y Z y X son variables independientes. Luego

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda_2 + \dots + \lambda_n} \times \frac{1}{\lambda_1}.$$