Práctico 5: Vectores Aleatorios[1]

1. El vector aleatorio (X, Y) tiene distribución discreta, dada en la siguiente tabla:

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	0,2	0	0,1	0
1	0,1	0,2	0,1	0
2	0	0,1	0,1	0,1

donde se indican las probabilidades $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$, de forma que, por ejemplo, $\mathbf{P}(X = 2, Y = 3) = 0{,}1$.

(a) Hallar $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$, y la función de distribución de la variable aleatoria X.

(b) Calcular $\mathbf{P}(Y = 0)$, $\mathbf{P}(Y = 1)$, $\mathbf{P}(Y = 2)$, $\mathbf{P}(Y = 3)$ y hallar la función de distribución de la variable aleatoria Y.

(c) Determinar si las variables X e Y son independientes.

2. Se consideran dos variables aleatorias X e Y, que toman los valores 1, 2 y 3 cada una con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3
1	0,02	0,08	c
2	a	0,08	0,1
3	0,06	b	0,3

(a) Hallar a , b y c sabiendo que X e Y son independientes.

(b) Calcular las funciones de probabilidad marginales.

3. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad conjunta dada por

$$p(x, y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde c es una constante. Hallar:

(a) el valor de c;

(b) la función de distribución de la variable aleatoria X;

(c) la función de distribución de la variable aleatoria Y;

(d) las densidades de las variables aleatorias X e Y.

(e) Determinar si las variables X e Y son independientes.

4. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} cxe^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde c es una constante.

[1] *Para trabajar en la semana 7*

(a) Hallar el valor de c.

(b) ¿Resultan independientes las variables aleatorias X e Y?

5.

(a) Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\geq 1,\ y\geq 1 \\ y & \text{si } y\in[0,1)\,,\ x\geq y \\ x & \text{si } x\in[0,1)\,,\ y\geq x \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Hallar la distribuciones marginales F_X y F_Y.

(b) Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\geq 1, \quad y\geq 1 \\ y & \text{si } x\geq 1, \quad y\in[0,1) \\ x & \text{si } x\in[0,1)\,, \quad y\geq 1 \\ xy & \text{si } x\in[0,1)\,, \quad y\in[0,1) \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Hallar la distribución (marginal) F_X y la distribución (marginal) F_Y.

(c) Si X e Y son variables aleatorias, ¿las distribuciones marginales F_X y F_Y determinan la distribución conjunta F_{XY}? ¿En qué caso F_X y F_Y determinan la distribución conjunta?

6. La duración en horas de un cierto tipo de lámpara es una variable aleatoria que tiene densidad dada por

$$p(x)=\begin{cases} 0{,}001e^{-0{,}001x} & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Se elijen al azar 3 lámparas de una cierta partida. Calcular las probabilidades de que:

(a) ni una de las lámparas se tenga que cambiar en el transcurso de las primeras 1000 horas;

(b) las tres lámparas tengan que ser cambiadas en el mismo lapso de tiempo.

7. Las variables aleatorias X e Y son independientes, y tienen la misma densidad, dada por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Demostrar que la variable aleatoria $X+Y$ tiene densidad, dada por

$$g(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

8. Demostrar la siguiente proposición: Si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces $X+Y$ es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1+\lambda_2$.

9. Sean X e Y variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Hallar la densidad de $X+Y$.

10. Sean X e Y variables aleatorias independientes, con densidades respectivas $p_1(x)$ y $p_2(x)$. Hallar la densidad de la diferencia $X-Y$.

11. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *iid* con distribución F.

(a) Calcular la función de distribución de $X_n^* = max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

(b) Calcular la función de distribución de $X_1^* = min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

12. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros μ y λ respectivamente.

(a) Hallar la distribución de la variable aleatoria $Z = min\{X, Y\}$.

(b) Calcular $P\{X < Y\}$ en función de μ y λ.

13. Un sistema electrónico con dos componentes A y B puede ser afectado por tres tipos de shock eléctrico.

1. Uno que sólo destruye a A y que se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo X_1 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_1.

2. Uno que sólo destruye a B y que se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo X_2 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_2.

3. Uno que destruye a ambos componentes y que se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo X_3 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_3.

Sean T_1 y T_2 los tiempos de vida de los componentes A y B respectivamente. Asumiendo que las variables X_1, X_2 y X_3 son independientes; hallar en función de λ_1, λ_2 y λ_3 la probabilidad $P\{T_1 = T_2\}$.