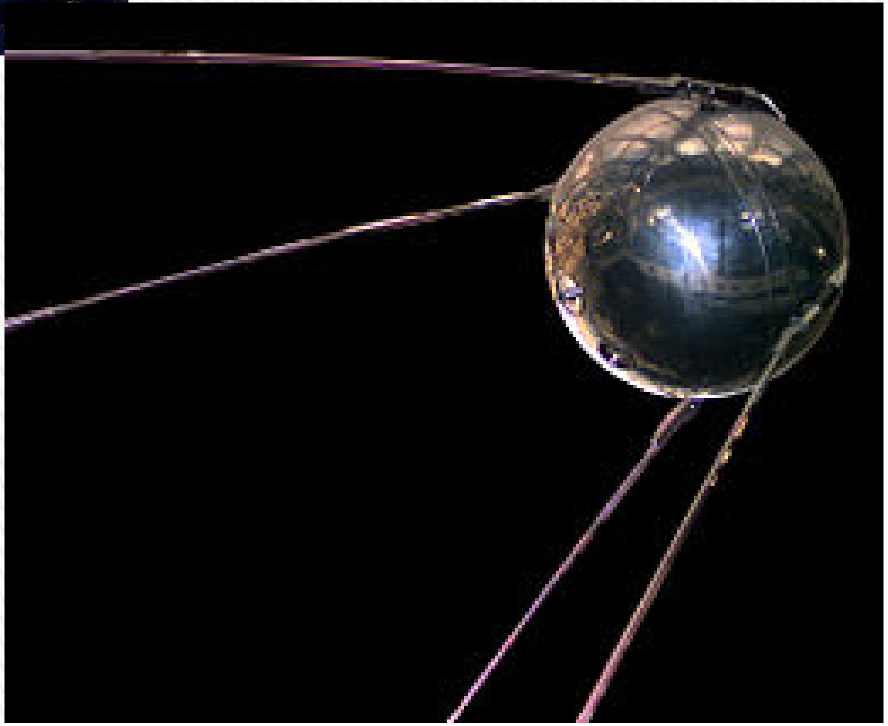
8- Dinámica rotacional, gravitación y movimiento de satélites



REPASO CLASE PASADA

¿Consultas o dudas de lo visto anteriormente?

1. Máquinas simples: palancas y ventaja mecánica.
2. Aplicaciones del modelo de palanca a movimiento de animales y mandíbulas de animales.
3. Movimiento circular uniforme.
4. Movimiento circular con aceleración angular constante.
5. Segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular.
6. Cinemática rotacional.
7. Relación entre torque y aceleración angular.

Cuestiones que pretendemos responder hoy:

1. Ejemplos de relación entre torque y aceleración angular.
2. Ley de Newton de Gravitación Universal.
3. Movimiento de satélites.
4. Satélites con órbita circular.
5. Leyes de Kepler .
6. Ejemplos de aplicación.

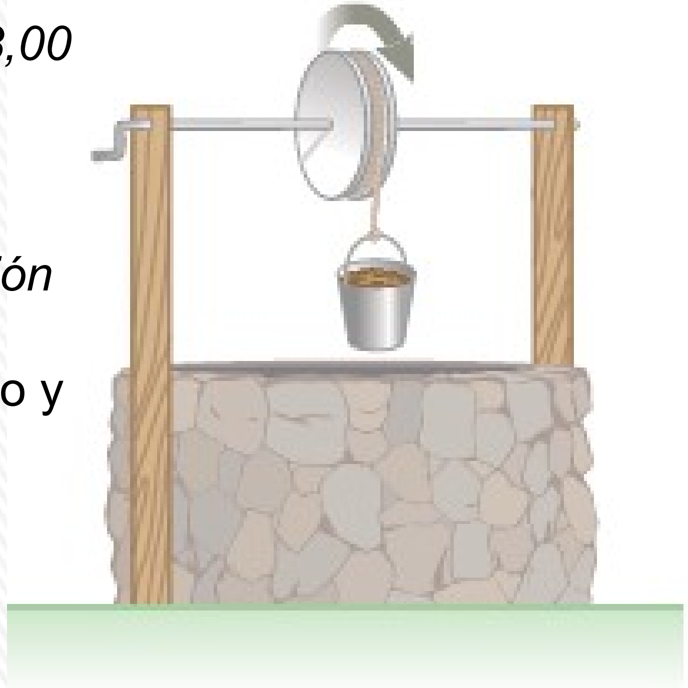
Clase de consultas para el parcial, 2 opciones:

1) Miércoles de 18:30 a 20:30

2) Viernes de 17:00 a 19:00.

Ejemplo: Descenso de un balde en un pozo

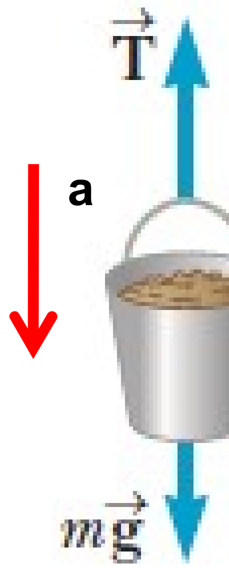
Un carrete sólido cilíndrico sin fricción, de masa *M=3,00 kg y radio R=0,400 m, se usa para* sacar agua de un pozo. Un balde de masa *m*= 2,00 kg se ata a una cuerda ideal que se enrolla alrededor del cilindro.
a) Encuentre la tensión *T en la cuerda y la aceleración a del balde.*
b) Si el balde parte del reposo desde la boca del pozo y cae durante 3,00 s antes de golpear el agua, ¿qué distancia recorre en la caída?



Este problema involucra tres incógnitas: la aceleración *a del balde, la aceleración* angular α *del cilindro y la tensión T en la cuerda, por lo que debemos establer tres ecuaciones:*
1) la segunda ley de Newton aplicada al balde, $ma = \Sigma F$;
2) la versión rotatoria de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$, *y*
3) la relación entre las aceleraciones lineal y angular, $a = r\alpha$, que conecta las dinámicas del balde y del cilindro.

El inciso b) es una revisión de cinemática.
Comencemos realizando los DCL del balde y del carrete

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe



Como el balde está cayendo, la aceleración a es hacia abajo.

Entonces voy a escribir la 2da. Ley de Newton, según el eje vertical, y considerando en sentido positivo hacia abajo:

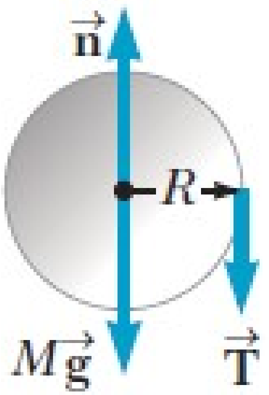
m.a= m.g – T (1)

El carrete se encuentra en equilibrio de traslación: la fuerza n equilibra la otras dos fuerzas actuantes: su peso Mg y la tensión T que le ejerce el balde a través de la cuerda.

Por tanto el carrete sólo puede rotar. Por lo que aplicamos *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$

En este caso, la única fuerza que realiza torque, es la tensión T con un brazo de palanca igual a R:

$$I\alpha = T.R$$



Ahora sustituimos: α=a/R y el valor de I correspondiente a un cilindro macizo ($MR^2/2$)

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R} = T.R \qquad \frac{1}{2}Ma = T \quad (2)$$

Sustituyen T en (1) y operando:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma \qquad \left(m + \tfrac{1}{2}M\right)a = mg \qquad a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}g$$

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe

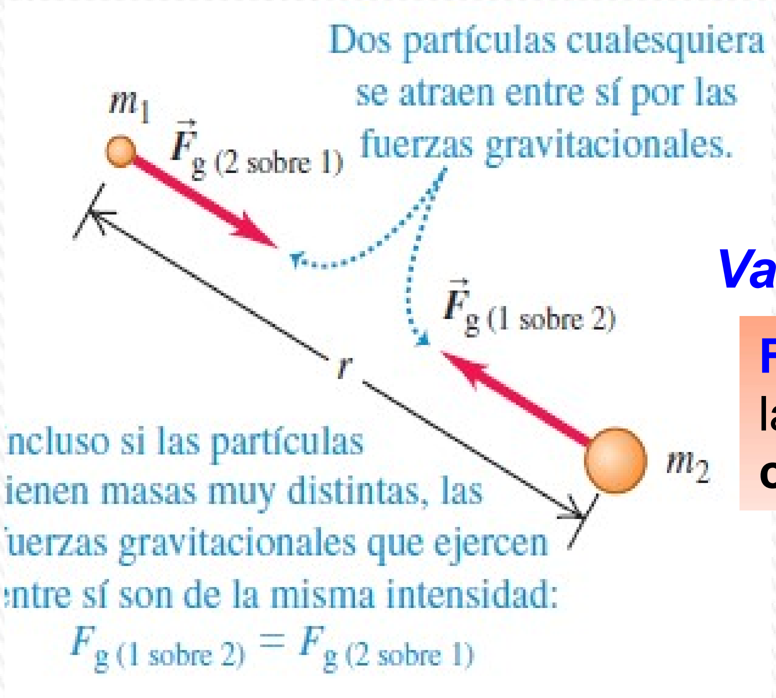
$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} g = \frac{2,00}{2,00 + \frac{1}{2}(3,00)} 9,80 = 5,60\ m/s^2$$

$$T = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{2}(3,00)(5,60) = 8,40\ N$$

b) Para determinar el desplazamiento del balde al cabo de 3,00 segundos de caída, aplico la expresión del desplazamiento para una aceleración constante; teniendo en cuenta que la velocidad inicial es nula.

$$\Delta y = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = \tfrac{1}{2}(5.60\ \mathrm{m/s^2})(3.00\ \mathrm{s})^2 = 25,2\ \mathrm{m}$$

La ley de Newton de la gravitación



$$F_g = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Valor aceptado de $G = 6{,}674\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2$

Fuerzas gravitacionales actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas **(fuerzas centrales)**, y forman un **par acción-reacción**.

PESO

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre éste por todos los demás cuerpos del Universo.

Si un cuerpo está cerca de la superficie terrestre, se pueden despreciar las demás fuerzas gravitacionales y considerar el peso tan solo como la atracción de la Tierra.

En la superficie de la *Luna, tomaremos el peso de un cuerpo como la atracción gravitacional* de la Luna, y así sucesivamente.

Si de nuevo modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico con radio R_E *y masa* m_E*, el* ***peso w de un cuerpo pequeño de masa m en la superficie terrestre*** (a una distancia R_E *del centro) es*

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2}$$

PESO y g

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2}$$

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2}$$

Peso *w de un cuerpo es la fuerza* que provoca la aceleración *g en caída libre, de modo que por la segunda ley de Newton, w = mg.*

Podemos obtener el valor de la masa de la Tierra, usando
R_E = *6.380 km = 6,38 ×10⁶ m y g = 9,80 m/s², se obtiene:*

$$m_E = \frac{gR_E^2}{G} = \frac{(9{,}80)(6{,}38\times 10^6)^2}{6{,}674\times 10^{-11}} = 5{,}98\times 10^{24}\ kg$$

muy cerca del valor actualmente aceptado de $5{,}974 \times 10^{24}$ kg.
Una vez que Cavendish midió *G, calculó la masa terrestre precisamente así.*

En un punto arriba de la superficie terrestre a una distancia *r del centro de la Tierra* (una altura *h= r -* R_E *sobre la superficie), el peso de un cuerpo está dado por:*

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{r^2}$$

Valores de g

Tabla 13.1 Variaciones de g con la latitud y la elevación

Estación	Latitud norte	Elevación (m)	$g (m/s^2)$
Zona del Canal	09°	0	9.78243
Jamaica	18°	0	9.78591
Bermudas	32°	0	9.79806
Denver, CO	40°	1638	9.79609
Pittsburgh, PA	40.5°	235	9.80118
Cambridge, MA	42°	0	9.80398
Groenlandia	70°	0	9.82534

Valor normalizado: 9,80665 m/s^2

Polo: 9,832 m/s^2

Ecuador: 9,78 m/s^2

Montevideo: 9,7974 m/s^2

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

	h = 0 m	h = 1 km	h= 10 km
g	9,8226	9,81949	9,79181
Error (%)		0,031	0,314

DENSIDAD DE LA TIERRA

Aun cuando la Tierra es una distribución de masa con simetría esférica aproximada, *no es uniforme volumétricamente.*

Si calculamos su densidad media, suponiendo una Tierra esférica:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R_E^3 = \frac{4}{3}\pi(6{,}38 \times 10^6)^3 = 1{,}09 \times 10^{21}\ m^3$$

$$\rho_E = \frac{m_E}{V_E} = \frac{5{,}98 \times 10^{24}}{1{,}09 \times 10^{21}} = 5{,}48 \times\times 10^3\ \ kg/m^3$$

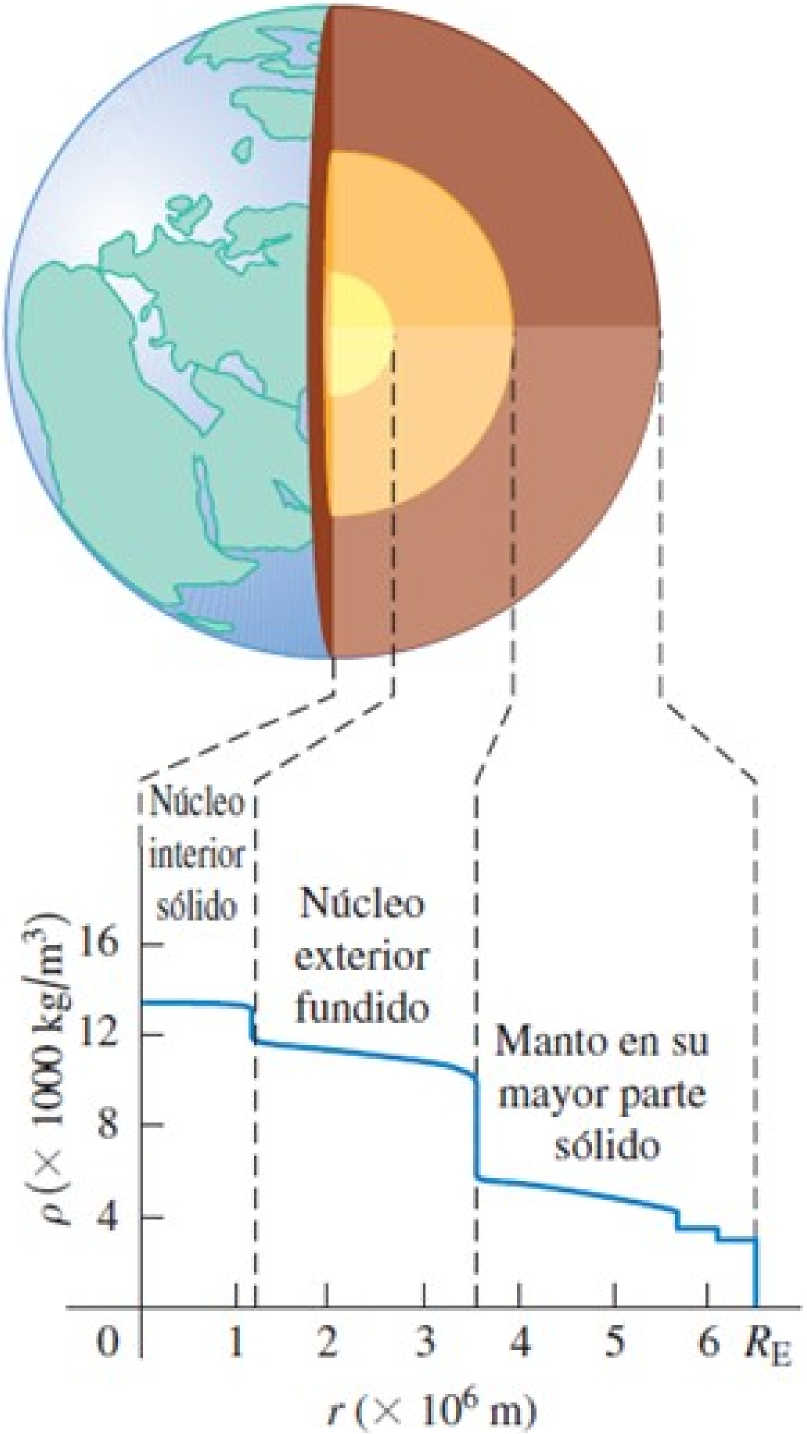
Si la Tierra fuera uniforme, la densidad de las rocas cerca de la superficie debería tener ese valor.

Pero la densidad de las rocas superficiales es bastante menor: de 2.000 kg/m^3 para rocas sedimentarias, a cerca de 3.300 kg/m^3 para el basalto (un tipo de roca volcánica).

Por lo tanto, **la Tierra *no puede ser uniforme***, y el **interior debe ser mucho más denso que la superficie** para que la densidad *media sea* de 5500 kg/m^3.

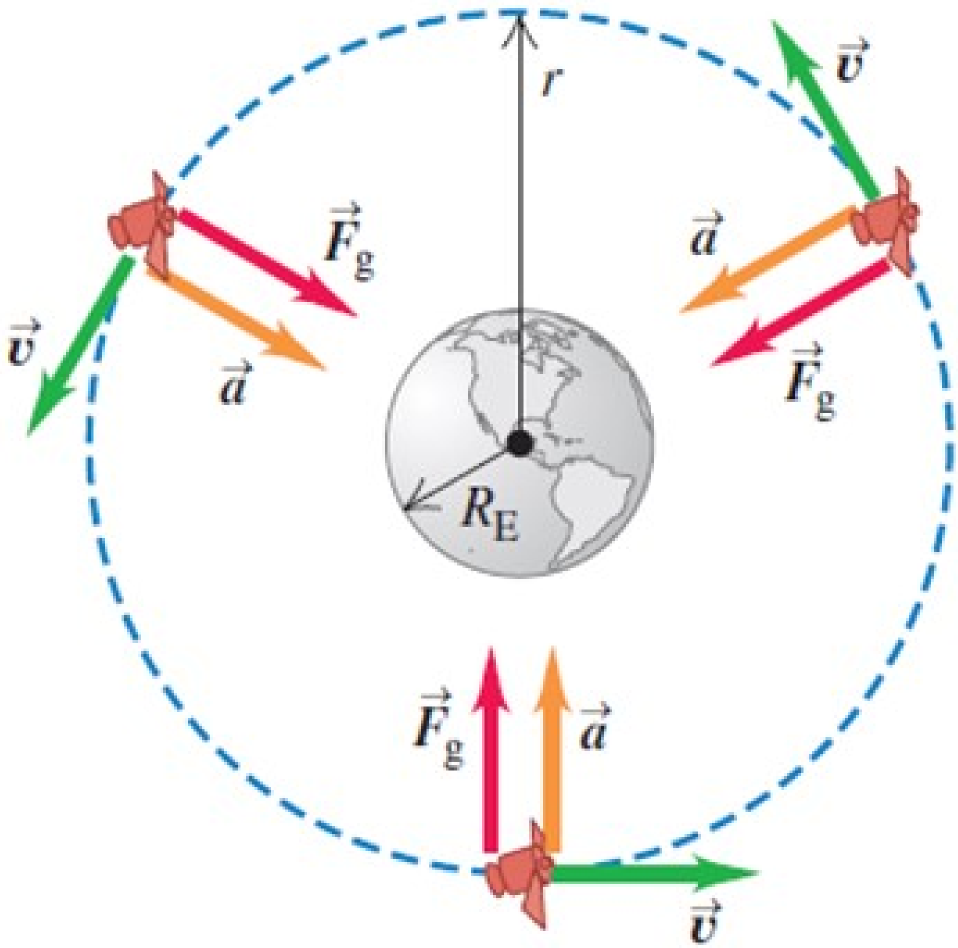
Según modelos geofísicos del interior de la Tierra, la densidad máxima en el centro es de aproximadamente 13,000 kg/m^3.

DENSIDAD DE LA TIERRA



La densidad de la Tierra disminuye al aumentar la distancia al centro.

Satélites: órbitas circulares



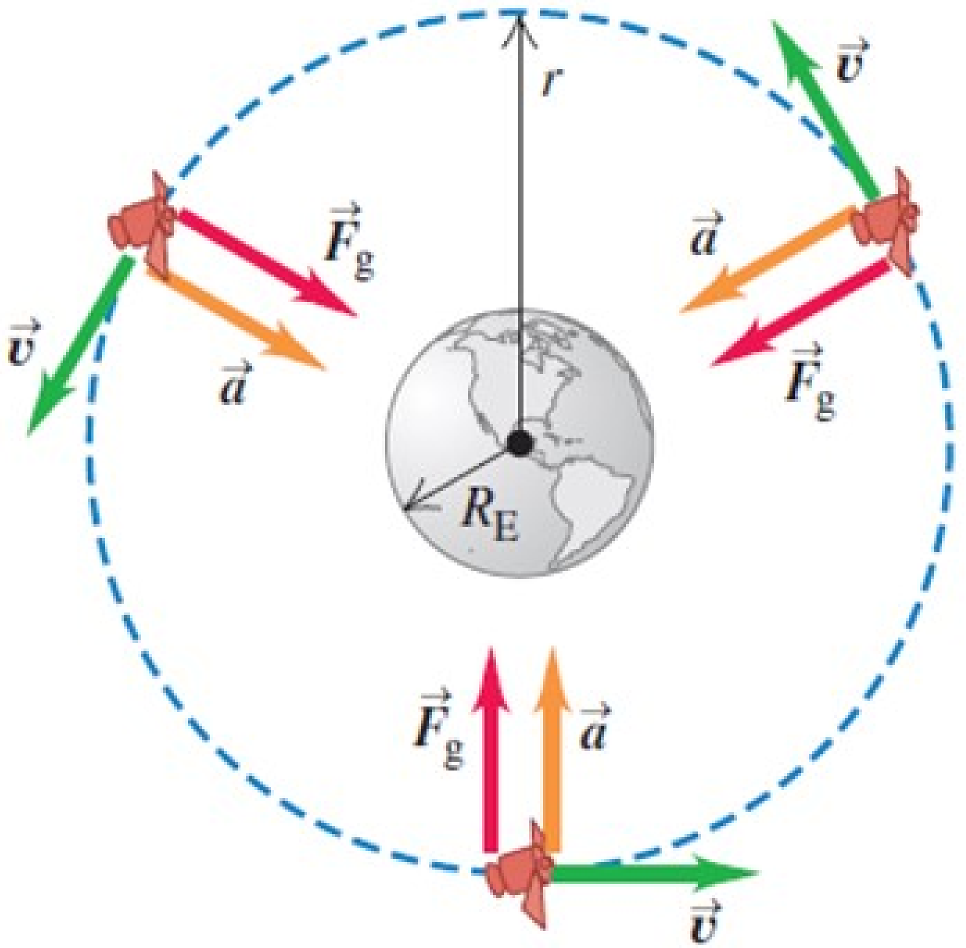
El satélite está en órbita circular: su aceleración $\vec{a}$ es siempre perpendicular a su velocidad $\vec{v}$, por ello, la rapidez v es constante.

Caso más sencillo y muy importante: muchos satélites artificiales tienen órbitas casi circulares, y las órbitas de los planetas alrededor del Sol también son aproximadamente circulares.

La única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por lo tanto, hacia el centro de la órbita.

Esto implica que el satélite está en **movimiento circular *uniforme*** *y su* rapidez es constante.

Satélites: órbitas circulares



El satélite está en órbita circular: su aceleración $\vec{a}$ es siempre perpendicular a su velocidad $\vec{v}$, por ello, la rapidez v es constante.

El satélite no cae *hacia la Tierra; más bien*, ***cae constantemente alrededor de la Tierra***.

***En una órbita circular, la rapidez es exactamente la necesaria* para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra.**

Satélites: órbitas circulares

El radio de la órbita es *r, medido desde el centro de la Tierra; la aceleración del* satélite tiene magnitud $a_{rad} = v^2/r$ *y siempre está dirigida hacia el centro del círculo.*

Por la ley de la gravitación, la fuerza neta (la gravitacional) que actúa sobre el satélite de masa *m tiene magnitud* F_g *y tiene la misma dirección de la aceleración.*

Por la segunda ley de Newton:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{m_E m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$$

Rapidez *v* de un objeto en una órbita circular de radio *r* alrededor de un cuerpo de masa *m*:

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$$

Satélites: órbitas circulares

El movimiento del satélite no depende de su masa.

Si pudiéramos partir un satélite a la mitad sin alterar su rapidez, cada mitad seguiría con el movimiento original.

Un astronauta a bordo de un transbordador espacial también es como un satélite de la Tierra, retenido por la atracción gravitacional en la misma órbita que la nave.

El astronauta tiene la misma velocidad y aceleración que la nave, así que nada lo empuja contra el piso o las paredes de la nave.

Se encuentra en un **estado de *ingravidez aparente***, *como en un elevador* en caída libre.

Ingravidez *verdadera:* *solo si el astronauta estuviera infinitamente lejos* de cualquier otra masa, de modo que la fuerza gravitacional sobre él fuera cero.

Satélites: órbitas circulares

Relación entre el radio *r de una órbita circular y el periodo T,* la duración de una revolución:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{Gm_E}{r}}} = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_E}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_E}}}$$

$$GmT^2 = 4\pi^2 r^3$$

Las órbitas más grandes corresponden a rapideces más bajas y a periodos más largos.

Ejemplo, Estación Espacial Internacional orbita la Tierra a 6.800 km del centro de nuestro planeta (400 km arriba de la superficie de la Tierra) con una rapidez orbital de 7,7 km/s y un periodo orbital de 93 minutos.
La Luna gira alrededor de la Tierra en una órbita mucho más grande de radio igual a 384.000 km, y por lo tanto tiene una rapidez orbital menor (1,0 km/s) y un periodo orbital mucho más prolongado (27,3 días).

Ejemplo: Ejercicio 4.6

¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra hay que poner en órbita un satélite (suponiendo la órbita circular y sobre el ecuador) para verlo siempre en el mismo lugar del cielo desde nuestra casa?

Este tipo de satélites se denomina **geoestacionario.**

G = 6,674×10^{-11} N.m^2/kg^2 m = 5,972×10^{24} kg T=24×3600=86.400 s =8,640×10^4 s

$$T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_E}} \qquad GmT^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$r = \left(\frac{6{,}674 \times 10^{-11}(5{,}972 \times 10^{24})(8{,}640 \times 10^4)^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ =4,2240×10^7 m= 42.240 km

Como el radio medio de la Tierra vale 6.341 km: h = 42.240 – 6.341 = 35.861 km

h = 3,59 ×10^7 m

Una órbita geoestacionaria es una órbita circular en el plano ecuatorial terrestre, y un movimiento de Oeste a Este (en el mismo sentido que la rotación de la Tierra). Desde Tierra, un objeto geoestacionario parece inmóvil en el cielo y, por tanto, es la órbita de mayor interés para los operadores de satélites artificiales de comunicación y de televisión.

En realidad se debería considerar como periodo el día sidéreo (23 h 56 min 4 s).

Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

Planeta: del griego "vagabundo": los planetas cambian continuamente su posición en el cielo en relación con el fondo estrellado.

Uno de los grandes logros intelectuales de los siglos XVI y XVII fue darse cuenta de que la Tierra es un planeta, que todos los planetas están en órbita alrededor del Sol y que los movimientos aparentes de los planetas vistos desde la Tierra pueden servir para determinar con precisión sus órbitas.

Primeros descubrimientos publicados:**Nicolás Copérnico** (Polonia, **1543).** Deducción de naturaleza de órbitas planetarias **Johannes Kepler (1601 y 1619)** usando un conjunto de datos precisos acerca de los movimientos planetarios aparentes compilado por su maestro, el danés **Tycho Brahe**. Por medio de ensayo y error, Kepler descubrió tres leyes empíricas que describían con exactitud los movimientos de los planetas:

Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

1. **Cada planeta se mueve en una órbita elíptica, con el Sol en uno de los focos de la elipse.**

2. Una línea del Sol a un planeta dado barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. Los periodos de los planetas son proporcionales a las longitudes del eje mayor de sus órbitas elevadas a la potencia 3/2.

$$T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{\frac{3}{2}}$$

Kepler no sabía *por qué los planetas se movían así.*
Tres generaciones después, cuando Newton dirigió su atención al movimiento planetario, descubrió que las leyes de Kepler pueden *deducirse;* ***son consecuencia de las leyes de Newton del movimiento y*** **de la ley de la gravitación**.

Ejemplo: Ejercicio 4.11

Podemos calcular la masa de un planeta poniendo un satélite a girar alrededor del mismo y midiendo el tiempo que demora en completar una vuelta. Si a estos efectos colocamos un satélite con un radio orbital de $4{,}0\text{x}10^7$ km y contamos 122 días para que regrese a su posición inicial. ¿Cuánto vale la masa de este planeta?

$r = 4{,}0\text{x}10^7$ km $= 4{,}0\text{x}10^{10}$ m

$T = 122$ días $= 122\times24\times3600 = 1{,}05408\ \text{x}10^7$ s

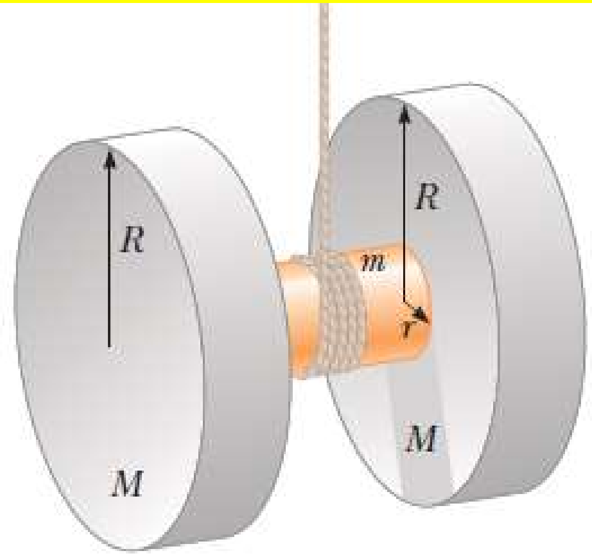
$$GmT^2 = 4\pi^2r^3$$

$$m = \frac{4\pi^2r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(4{,}0\times10^{10})^3}{(6{,}674\times10^{-11})(1{,}05408)^2} = 3{,}41\times10^{29}\ \text{kg}$$

m = $3{,}4\times10^{29}$ kg

Ejemplo: Ejercicio 4.12

Un yo-yo de gran tamaño se hace con dos discos sólidos idénticos cada uno de masa M = 2,00 kg y radio R = 10,0 cm. Los dos discos son ensamblados por un cilindro sólido de radio r = 4,00 cm y cuya masa vale m = 1,00 kg como se muestra en la figura. Tome el centro del cilindro como el eje del sistema, con los torques positivos dirigidos a la izquierda a lo largo de este eje. Todos los torques y variables angulares son calculados en relación con este eje. Una cuerda ligera se enrolla alrededor del cilindro y después se deja caer el sistema a partir del reposo.



a) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema? Dé una respuesta simbólica.

b) ¿Qué torque ejerce la gravedad sobre el sistema con respecto al eje dado?

c) Tome como negativa la coordenada en la dirección de la caída. Según lo representado en la figura, ¿el torque ejercido por la tensión es positivo o negativo? ¿La aceleración angular es positiva o negativa? ¿Qué hay de la aceleración de translación?

d) Escriba una ecuación para la aceleración angular α en términos de la aceleración de translación a y radio r.

e) Escriba la segunda ley del Newton para el sistema en términos de m, M, a, T y g.

f) Escriba la segunda ley del Newton para la rotación en términos de I, α T y r.

g) Elimine α de la segunda ley rotatoria con la expresión encontrada en la parte d) y encuentre una expresión simbólica para la aceleración a en términos de m, M, g, r y R.

h) ¿Cuál es el valor numérico para la aceleración del sistema?

i) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

j) ¿Cuánto tiempo toma al sistema caer 1,00 m a partir del reposo?

Ejemplo: Ejercicio 4.12

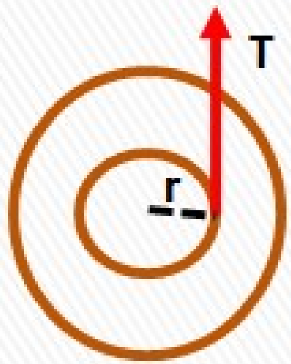
a) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema? Dé una respuesta simbólica.

$$I = 2I_{\text{disk}} + I_{\text{cylinder}} = 2\left(MR^2/2\right) + mr^2/2 \qquad \text{or} \qquad \boxed{I = MR^2 + mr^2/2}$$

b) ¿Qué torque ejerce la gravedad sobre el sistema con respecto al eje dado?

Como el peso está aplicado en el centro de gravedad, y éste se encuentra en el eje de rotación, su brazo de palanca es nulo, por tanto: $\tau_{peso} = 0$

c) Tome como negativa la coordenada en la dirección de la caída. Según lo representado en la figura, ¿el torque ejercido por la tensión es positivo o negativo? ¿La aceleración angular es positiva o negativa? ¿Qué hay de la aceleración de translación?



Como la tensión tiende a hacer girar al yo-yo en sentido antihorario entonces el torque que realiza la tensión respecto al eje de giro es positivo.

Como $\tau = I.\alpha$ e $I>0$, entonces α es positiva.

Como el yo-yo desciende, entonces a es negativa.

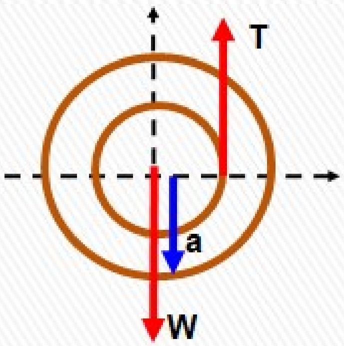
Ejemplo: Ejercicio 4.12

d) Escriba una ecuación para la aceleración angular α en términos de la aceleración de translación a y radio r.

La aceleración de traslación del yo yo corresponde a la aceleración tangencial del cilindro central y a su vez, la aceleración tangencial es igual a la aceleración angular por el radio.
Pero por la convención de signos usados en la que $a < 0$ y $\alpha > 0$ se tiene que:

$\alpha = - a/r$

e) Escriba la segunda ley del Newton para el sistema en términos de m, M, a, T y g



$$\sum F_y = m_{total}a \qquad T - W = -(2M + m)a$$

$$(2M + m)g - T - (2M + m)a$$

f) Escriba la segunda ley del Newton para la rotación en términos de I, α, T y r

$$I_O\alpha = \sum \tau_O \qquad \left(MR^2 + \frac{mr^2}{2}\right)\alpha = T.r$$

Ejemplo: Ejercicio 4.12

g) Elimine α de la segunda ley rotatoria con la expresión encontrada en la parte d) y encuentre una expresión simbólica para la aceleración a en términos de m, M, g, r y R.

α = a/r

$$(2M+m)g - T = (2M+m)a$$

$$\left(MR^2+\frac{mr^2}{2}\right)\alpha = T.r$$

$$\left(MR^2+\frac{mr^2}{2}\right)\frac{a}{r} = T.r \qquad T = \left(MR^2+\frac{mr^2}{2}\right)\frac{a}{r^2}$$

$$(2M+m)g - \left(MR^2+\frac{mr^2}{2}\right)\frac{a}{r^2} = (2M+m)a$$

$$(2M+m)g = (2M+m)a + \left(MR^2+\frac{mr^2}{2}\right)\frac{a}{r^2}$$

$$(2M+m)g = \left(2M+\frac{3m}{2}+M\frac{R^2}{r^2}\right)a$$

$$a = \frac{2M+m}{2M+\frac{3m}{2}+M\frac{R^2}{r^2}}g$$

h) ¿Cuál es el valor numérico para la aceleración del sistema?

$$a = \frac{2M+m}{2M+\frac{3m}{2}+M\frac{R^2}{r^2}}g = \frac{2(2,00)+1,00}{2(2,00)+\frac{3(1,00)}{2}+(2,00)\frac{10,0^2}{4,00^2}}9,80 = 2,72\ m/s^2$$

Ejemplo: Ejercicio 4.12

i) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

$$(2M+m)g - T = (2M+m)a$$

$$T = (2M+m)(g-a)$$

$$T = (2M+m)(g-a) = (2\times 2,00 + 1,00)\times(9,80-2,72) = 35,4\ N$$

j) ¿Cuánto tiempo toma al sistema caer 1,00 m a partir del reposo?

$$h = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(1,00)}{2,72}} = 0,857\ s$$