ANUNCIOS

1. **Cuarta evaluación corta:** Desde el jueves 26 de mayo hasta el sábado 28 de mayo a la medianoche. Unidad 4 (Movimiento circular, rotaciones, dinámica de rotaciones, gravitación).

17- Trabajo, energía y potencia

- Concepto de trabajo mecánico.
- Trabajo realizado por una fuerza constante.
- Producto escalar.
- Energía cinética.
- Teorema trabajo-energía.
- Potencia.

TRABAJO

En física, el trabajo tiene un significado diferente: **se realiza trabajo sólo si un objeto se desplaza de un punto a otro mientras se le aplica una fuerza.**

Realizar trabajo implica aplicar una fuerza a un objeto mientras se mueve una distancia determinada.
Simbolo del trabajo: letra W (proviene del inglés work).

El trabajo es una cantidad escalar.

No trabajaremos con la forma más general de trabajo, sino que nos restringiremos a las **situaciones más simples: trabajo realizado por una fuerza constante.**

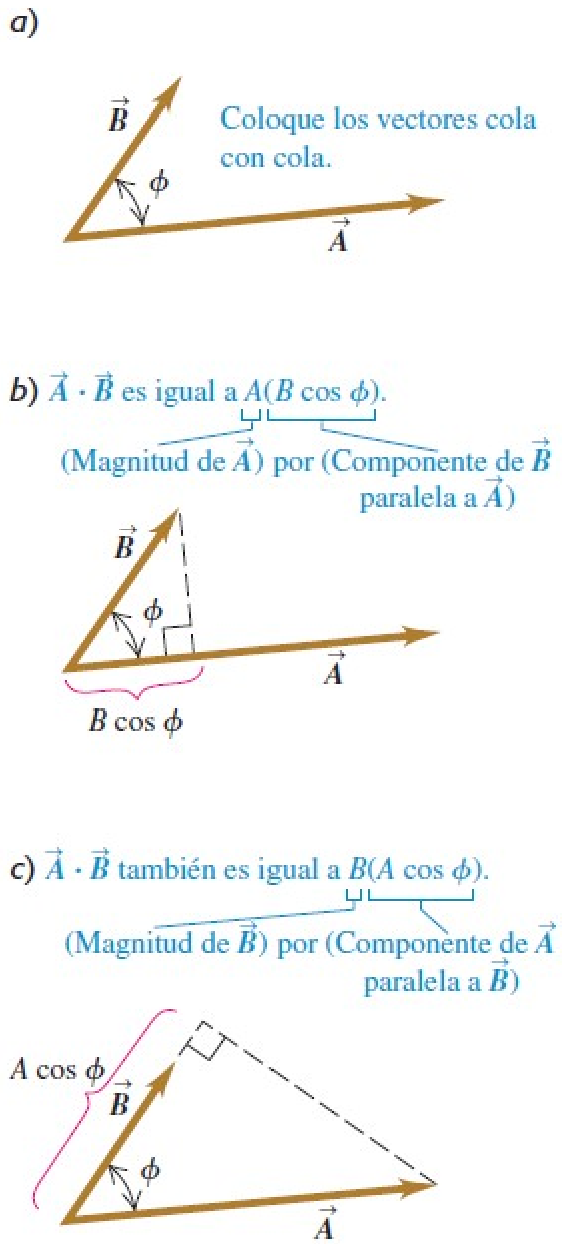
TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

Al levantar la pesa se realiza trabajo…

Aunque gaste energía cuando empuja la pared, si la pared no se mueve, no se realiza ningún trabajo sobre la pared

Vamos a introducir a continuación una nueva operación entre vectores: el **producto escalar.**

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES



Definición:

$$\bar{A}.\bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}| \cos \Phi = AB \cos \Phi$$

Es una cantidad escalar, no un vector, y puede ser positivo, negativo o cero.

A partir de la definición, se ve que el producto escalar es **conmutativo**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Obedece la **ley distributiva de la multiplicación**:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Aplicando el producto escalar entre los versores:

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = (1)(1)\cos 0^\circ = 1$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = (1)(1)\cos 90^\circ = 0$$

Una forma alternativa de calcular el producto escalar a través de las componentes:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\
&= A_x\hat{\imath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_z\hat{k} \\
&\quad + A_y\hat{\jmath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_z\hat{k} \\
&\quad + A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k} \\
&= A_xB_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + A_xB_y\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + A_xB_z\hat{\imath}\cdot\hat{k} \\
&\quad + A_yB_x\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + A_yB_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + A_yB_z\hat{\jmath}\cdot\hat{k} \\
&\quad + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{\imath} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{\jmath} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$ (producto escalar (punto) en términos de sus componentes)

El producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Ejemplo

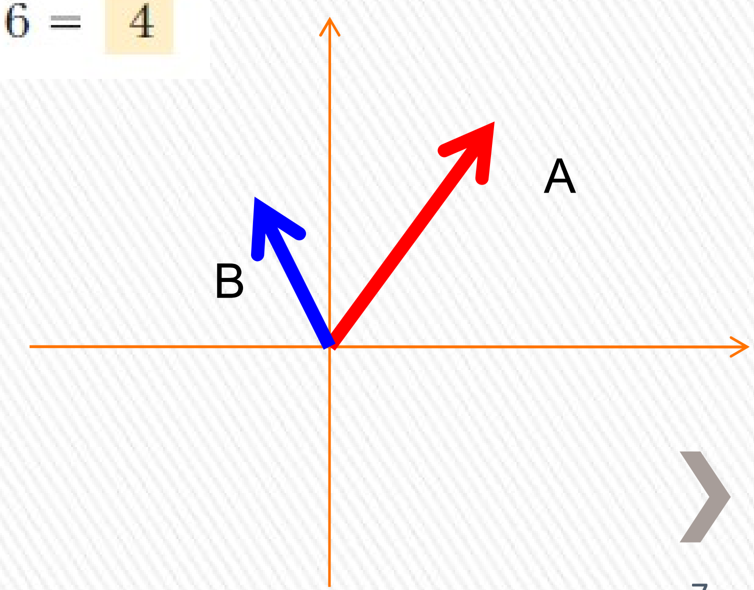
Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se conocen por $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$.

a) Calcular el producto escalar entre ambos vectores.
b) Calcular el ángulo que forman.

Como: $\bar{\boldsymbol{A}}.\bar{\boldsymbol{B}} = AB\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\bar{\boldsymbol{A}}.\bar{\boldsymbol{B}}}{AB}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})\cdot(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})\\ &= -2\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}}\\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1) = -2 + 6 = \boxed{4}\end{aligned}$$



$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

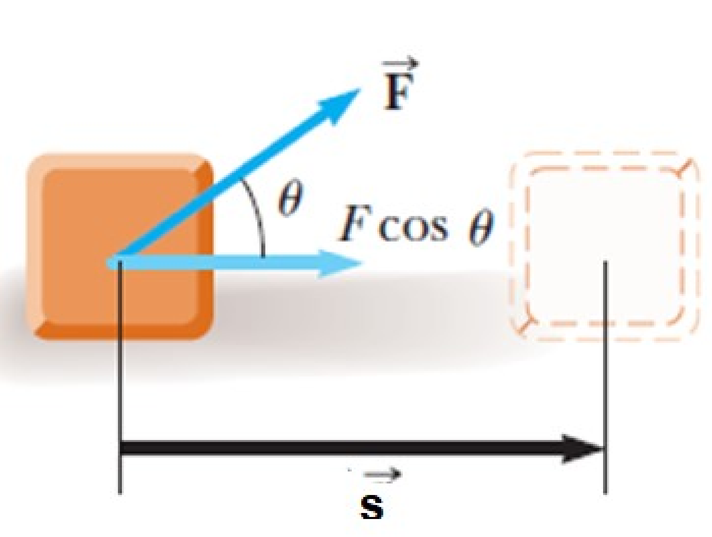
$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{65}} = \boxed{60.3°}$$

TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

Cuando una fuerza **F** constante actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento rectilíneo **s** el trabajo (W) realizado por la fuerza sobre la partícula se define como el producto escalar de **F** por **s:**

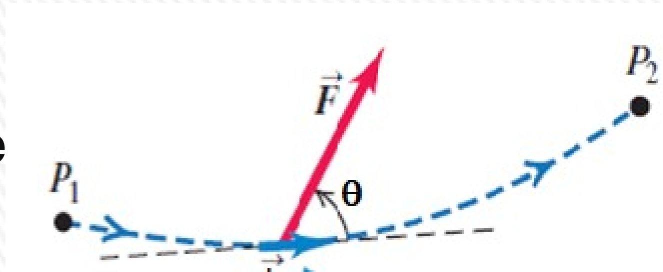
$$W = \bar{F}.\bar{s} = Fs\cos\theta$$



El trabajo es una cantidad escalar, y puede ser positivo, negativo o nulo según el ángulo θ que formen.
Observar que es una cantidad escalar a pesar que **F** y **s** son vectores.

Unidad de trabajo en SI:
1 joule = 1 newton-metro (1 J = 1 N.m).

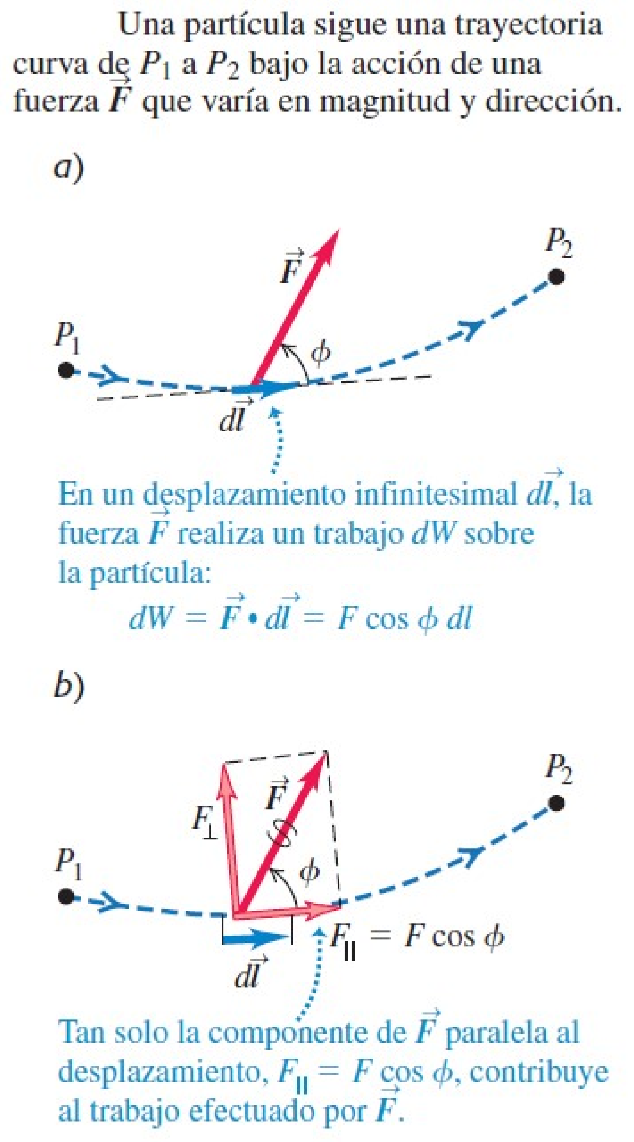
Definición general de trabajo: el diferencial de trabajo de una fuerza que varía de dirección y magnitud, con un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva es: $dW = \bar{F}.d\bar{s}$



Para calcular el trabajo total W se debe integrar dW a lo largo de la trayectoria .

TRABAJO DE UNA FUERZA CUALQUIERA

Se puede generalizar la definición de trabajo para incluir una fuerza que varía de dirección y magnitud, con un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva.



Definición general de trabajo: el diferencial de trabajo de una fuerza que varía de dirección y magnitud, con un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva es:

$$dW = \overline{\mathbf{F}}.d\overline{\mathbf{s}}$$

$$dW = F\cos\phi \, dl = F_\parallel \, dl = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

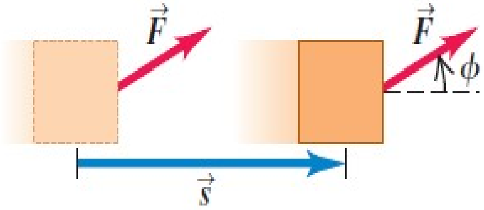
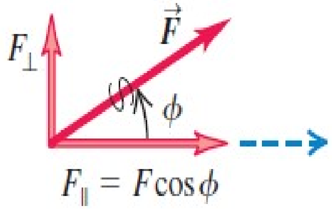
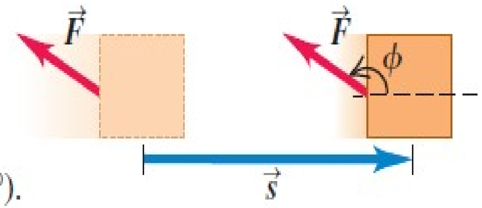
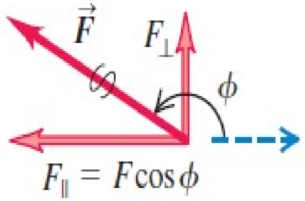
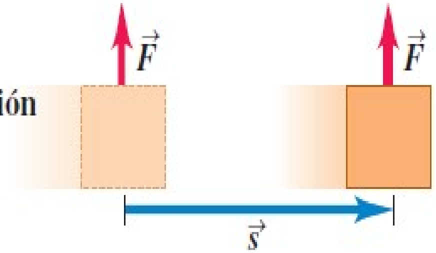
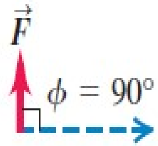
Para calcular el trabajo total W se debe integrar dW a lo largo de la trayectoria .

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi \, dl = \int_{P_1}^{P_2} F_\parallel \, dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

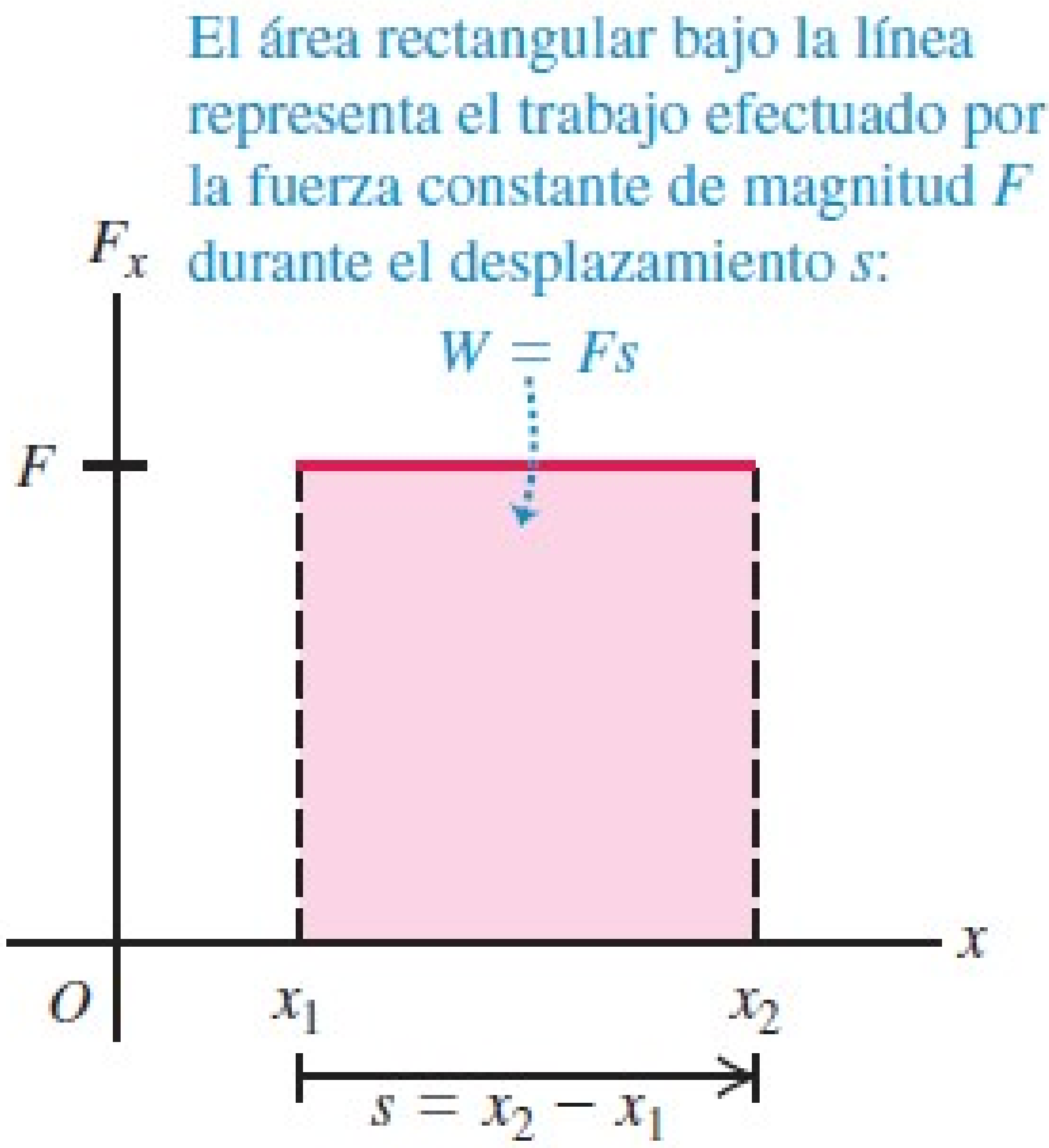
Esta integral se conoce como *integral de línea.*

TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

El trabajo puede ser positivo, negativo o nulo…

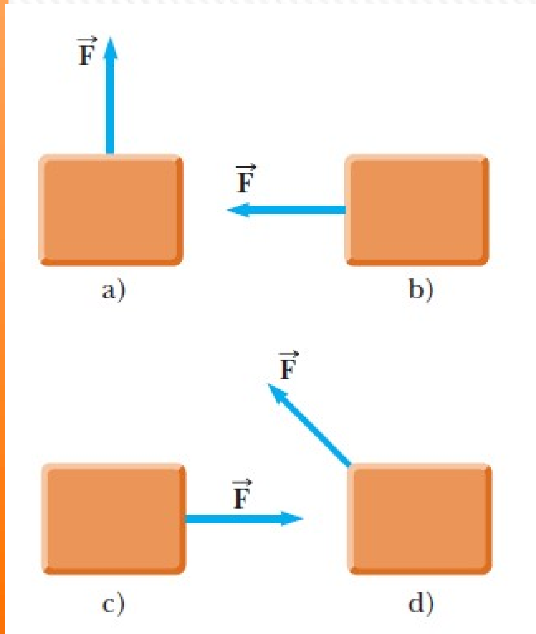
Dirección de la fuerza (o de la componente de la fuerza)	Situación	Diagrama de fuerzas
La fuerza $\vec{F}$ tiene una componente en la dirección del desplazamiento: $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$ El trabajo es *positivo*.		
La fuerza $\vec{F}$ tiene una componente opuesta a la dirección del desplazamiento: $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$ El trabajo es *negativo* (porque $F\cos\phi$ es negativo para $90° < \phi < 180°$).		
La fuerza (o componente $F_{\perp}$ de la fuerza) es perpendicular a la dirección del desplazamiento: La fuerza (o componente de la fuerza) *no* realiza trabajo sobre el objeto.		

TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE



En una gráfica de fuerza como una función de la posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por el área bajo la curva entre las posiciones inicial y final.

PREGUNTA RÁPIDA



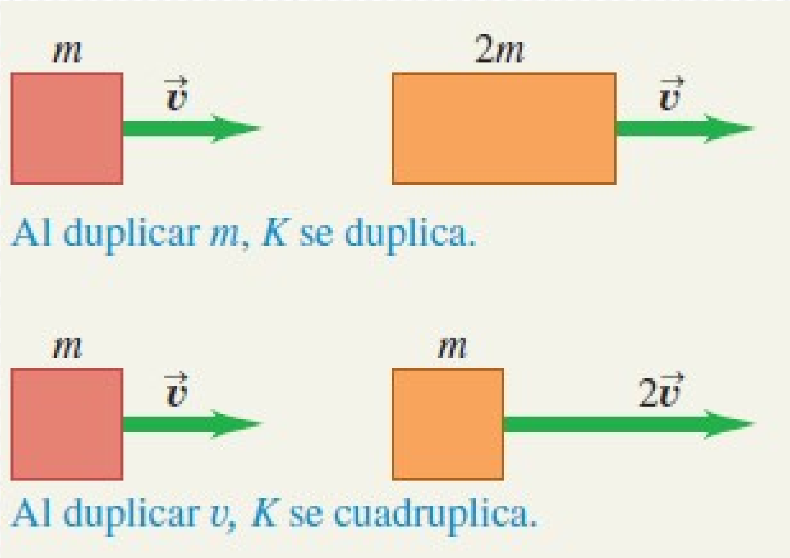
La figura muestra cuatro situaciones en las que una fuerza se aplica a un objeto. En los cuatro casos, **la fuerza tiene la misma magnitud** y el **desplazamiento del objeto es hacia la derecha** y de la misma magnitud.

Clasifique las situaciones en orden del trabajo invertido por la fuerza sobre el objeto, **del más positivo al más negativo**.

Como: $W = F\Delta s \cos\theta$ y F y Δs valen lo mismo para todos los casos, tenemos que primará el que tenga mayor valor de $\cos\theta$. Por tanto el orden es:

c) a) d) y b)

ENERGÍA CINÉTICA



Energía cinética de una partícula de masa m y velocidad v se define como:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

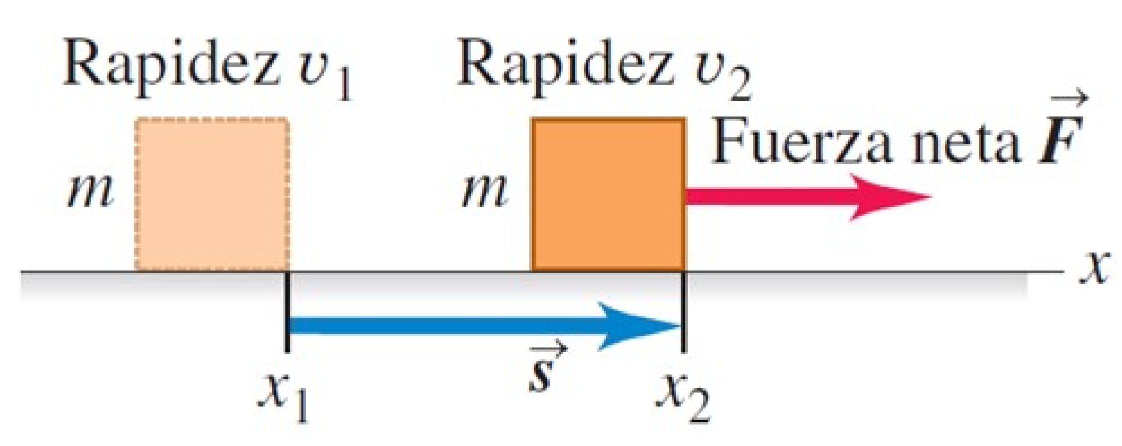
La **energía cinética *K de una partícula*** es igual a la cantidad de trabajo necesario para acelerarla desde el reposo hasta la rapidez *v.*

Es una cantidad escalar siempre es positiva o cero, y sus unidades son las mismas que las de trabajo.

Para un cuerpo rígido que sólo se traslada, la energía cinética tiene la misma expresión, ya que todo el rígido tiene la misma velocidad para todos sus puntos

TEOREMA TRABAJO Y ENERGÍA

Movimiento unidimensional, fuerza constante.



Si la fuerza es constante, la aceleración también lo es. De cinemática sabemos que:

$$v_F^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as$$

$$as = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

Por la 2da. Ley de Newton: $a = \dfrac{F}{m}$

$$\frac{F}{m}s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \qquad Fs = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

Pero: F.s= W.

$$m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

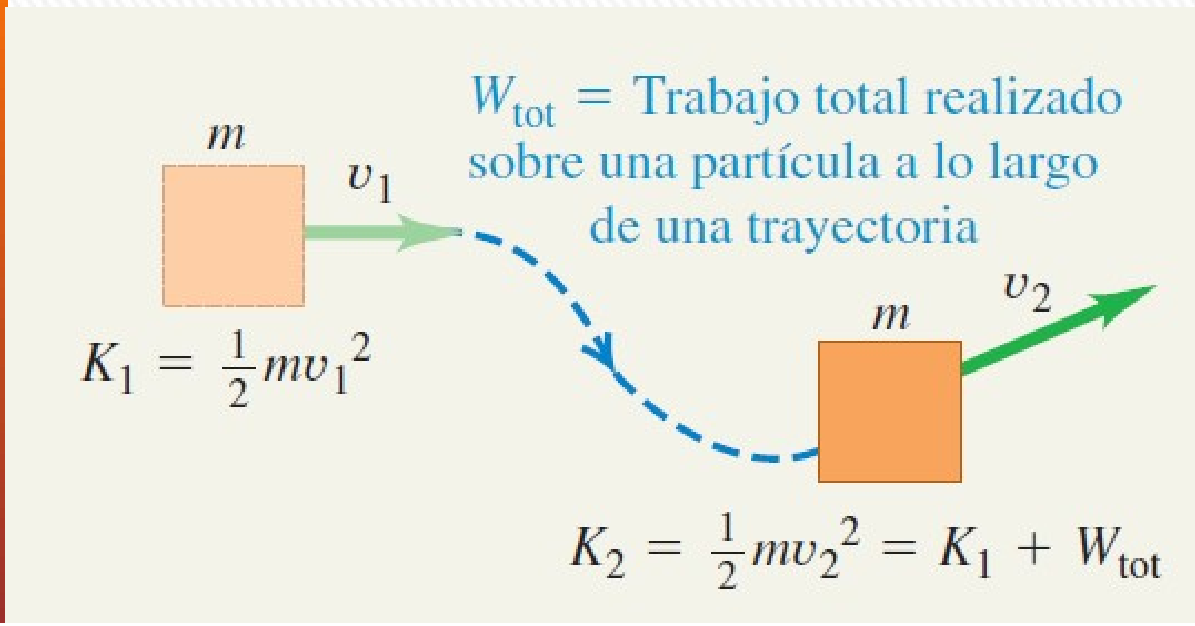
$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

TEOREMA TRABAJO Y ENERGÍA

Cuando sobre una partícula se realiza trabajo mecánico (W) el mismo es igual a la variación de la energía cinética (ΔK) que experimenta.

Si bien lo demostramos para un caso de una dimensión y para una fuerza constante, esta relación, es válida para fuerzas tanto constantes como variables, y para trayectorias de la partícula tanto rectas como curvas.

Restricciones: solo aplicable a cuerpos que se modelan como partículas y solo podemos usarlo en un marco de referencia inercial



$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

POTENCIA

La rapidez con la cual se transfiere energía, o en la que se realiza el trabajo se llama **potencia.**

Potencia media P_{med} *es la cantidad de trabajo ΔW realizada en un tiempo Δt dividida entre ese tiempo.*

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Al igual que el trabajo y la energía cinética, la potencia es una cantidad escalar.

Su unidad en el SI es el **watt** (en honor a James Watt)

1 watt = 1 joule/segundo (1 W = 1 J/s).

Algunas veces es útil rescribir la ecuación anterior sustituyendo $W = F\,\Delta x$ *y notando que* $\Delta x/\Delta t = v$ es la rapidez media del objeto durante el tiempo Δt :

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F\,\Delta x}{\Delta t} = F v_{med}$$

En esta ecuación la fuerza *F es la componente de la fuerza en la dirección de la velocidad* media.

POTENCIA

Una definición más general, conocida como **potencia instantánea**, rescrita a continuación con un poco de cálculo; como el límite de la potencia media cuando *Δt se acerca a cero:*

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} P_{med} = \frac{dW}{dt}$$

.

$$\boldsymbol{P = Fv}$$

en esta ecuación la fuerza *F y la velocidad v deben ser paralelas, pero pueden cambiar* con el tiempo.

$$P = \overline{F}.\overline{v}$$

La unidad de potencia en el sistema tradicional de Estados Unidos es el caballo de fuerza (hp, del inglés *horse power), donde*

$$1\ hp = \frac{550\ pies.\,libra}{segundo} = 746\ W$$

En la generación de energía eléctrica, se acostumbra a utilizar el kilowatt-hora como una medida de la energía. Un kilowatt-hora (kWh) es la energía que se transiere en 1 hora con la relación constante de 1 kW = 1000 J/s. Por lo tanto:

1 KWH= $3{,}60\times10^{6}$ J

EJEMPLO

Cada uno de los cuatro motores a reacción de un avión Airbus A380 desarrolla un empuje (fuerza hacia adelante sobre el avión) de 322.000 N. Cuando el avión está volando a una rapidez de 250 m/s (900 km/h), ¿cuántos caballos de potencia (hp) desarrolla cada motor?

$$P_{med} = Fv_{med} = (3{,}22 \times 10^5)N \times \frac{(250)m}{s} = 8{,}05 \times 10^7\ W$$

$$= (8.05 \times 10^7\ \text{W})\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}} = 108{,}000\ \text{hp}$$

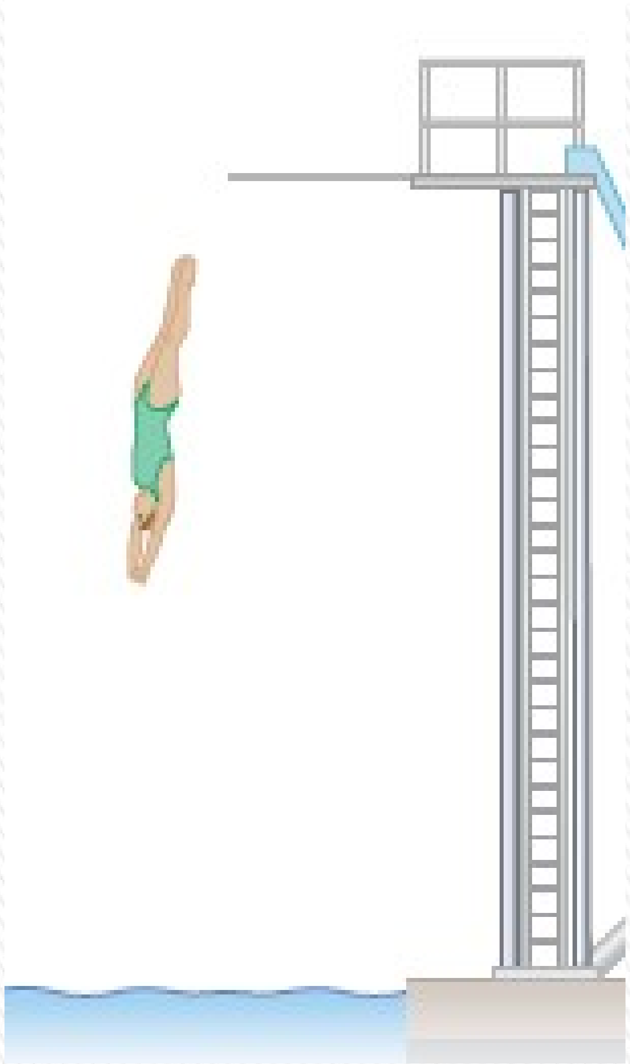
Cada motor desarrolla una potencia de un cuarto de este valor: $1{,}08 \times 10^5$ hp (108.000 hp).

Es decir que cada motor desarrolla una potencia de 27.000 hp.

FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

Existen dos tipos generales de fuerzas: **fuerza conservativas,** como el peso (fuerza gravitatoria), y **fuerza no conservativas** (fricción o disipativas).

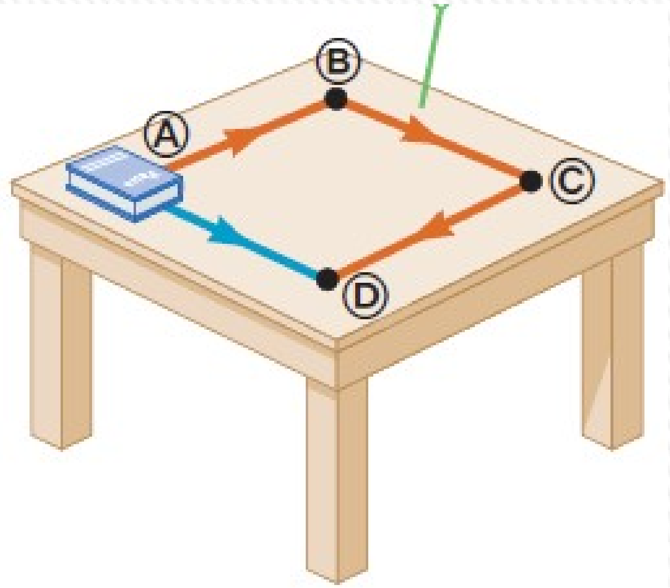
Un clavadista sube a una plataforma , y tiene que realizar trabajo contra la gravedad, al escalar.
Pero una vez en la parte superior puede recuperar el trabajo, como energía cinética, al zambullirse.
Su velocidad antes de entrar en el agua (despreciando los rozamientos) le dará una energía cinética igual al trabajo que hizo contra la gravedad.
En general una **fuerza no conservativa es disipadora, lo que significa que tiende a dispersar** aleatoriamente la energía de los cuerpos sobre los que actúa.



FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

La dispersión de energía con frecuencia toma la forma de calor o sonido.
La fricción cinética y la fuerza de resistencia del aire son buenos ejemplos.
Fuerzas propulsoras, semejantes a la fuerza ejercida por un motor de reacción en un avión o por la hélice en un navío, también son no conservativas.

Otra manera de caracterización: medir el trabajo que lleva a cabo una fuerza sobre un objeto desplazado entre dos puntos a lo largo de diferentes trayectorias.
El trabajo realizado por la gravedad sobre alguien que se desliza hacia abajo sin fricción, es igual al que se lleva a cabo sobre el clavadista desde la misma altura.
Esta igualdad no se cumple para fuerzas no conservativas.



Por ejemplo, desplazar un libro directamente desde el punto A hasta el punto D en la figura se necesita una cierta cantidad de trabajo contra la fricción, pero deslizar el libro a lo largo de los otros tres lados del cuadrado, desde A hasta B, de B hasta C y, por último, de C hasta D, necesita tres veces más trabajo.

FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

La observación anterior genera la siguiente definición de una fuerza conservativa:

Una fuerza es conservativa si el trabajo realizado al mover un objeto entre dos puntos es el mismo sin importar qué trayectoria se considere.

Las fuerzas no conservativas no tienen esta propiedad.
El teorema trabajo-energía, se puede reescribir en términos del trabajo invertido por fuerzas conservativas *Wc y el trabajo gastado por fuerzas no conservativas Wnc ya que el trabajo neto* es precisamente la suma de éstas dos:

$$W_c + W_{nc} = \Delta K$$

Tenemos que las fuerzas conservativas poseen otra propiedad útil.
El trabajo que realizan se puede expresar a través de una variación de algo que se conoce como **energía potencial**, una cantidad que depende sólo de los puntos inicial y final de una curva, no de la trayectoria que sigue.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Un ladrillo en lo alto de una repisa puede realizar trabajo: puede caer de la repisa, acelerar hacia abajo y golpear firmemente un clavo, clavándolo en un piso de madera.
Se dice que el ladrillo tiene asociada una **energía potencial gravitatoria,** debido a que desde su ubicación sobre la repisa puede hacer potencialmente trabajo.

La energía potencial es una propiedad de un **sistema, en lugar de un solo objeto,** ya que se debe a una posición física en el espacio relativa a un centro de fuerza, como el clavadista y la Tierra.
La energía potencial gravitatoria es otra manera de ver cómo la fuerza peso realiza trabajo.

Trabajo gravitacional y energía potencial gravitatoria

Para resolver problemas que involucran la gravitación podemos usar el teorema trabajo-energía, pero se requiere el cálculo del trabajo realizado por la gravedad (es decir la fuerza peso).
Para la mayoría de las trayectorias, por ejemplo, para una pelota que recorre un arco parabólico, el determinar el trabajo gravitacional realizado sobre la pelota requiere técnicas complicadas de cálculo.
Por suerte, para campos conservativos existe una alternativa simple: la energía potencial.

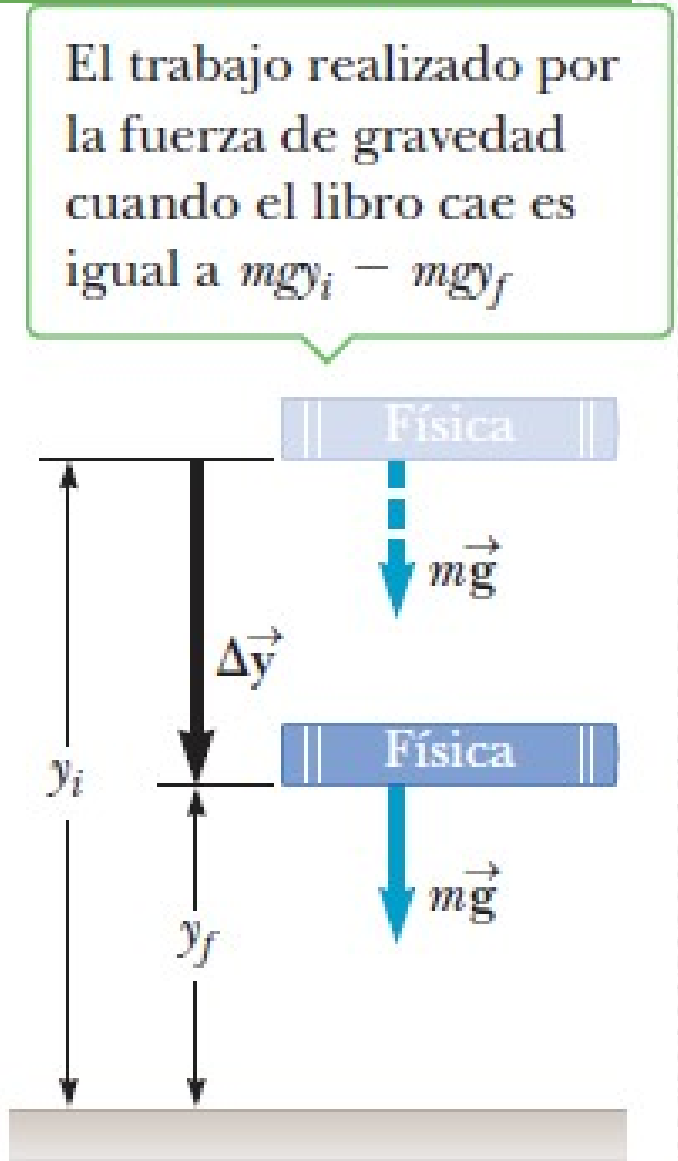
El **peso**, es decir la fuerza gravitatoria es una **fuerza conservativa** y, para toda fuerza conservativa, se puede encontrar una expresión especial conocida como una **función de energía potencial**.
Al evaluar esa función en dos puntos cualesquiera en una trayectoria del objeto en movimiento y encontrando la diferencia nos dará como resultado el negativo del trabajo realizado por esa fuerza entre los dos puntos.

Trabajo gravitacional y energía potencial gravitatoria

Un libro de masa *m cae desde una altura* y_i *hasta una altura* y_f, donde la coordenada *y positiva representa las posiciones por encima de la superficie del* suelo.
Si se desprecia la fuerza de fricción del aire, la única fuerza que actúa sobre el libro es la de gravedad.

¿Cuánto trabajo se realizó?

Las magnitudes de la fuerza es *mg y la del desplazamiento es* $\Delta y = y_i - y_f$ *(un número positivo), mientras los dos* ***F*** y *Δ***y** están apuntando hacia abajo, de manera que el ángulo entre ellos es cero.
Aplicamos la definición de trabajo:



$$W_g = Fs\cos\theta = mg(y_i - y_f)\cos 0 = -mg(y_f - y_i)$$

Trabajo gravitacional y energía potencial gravitatoria

$$W_g = Fs\cos\theta = mg(y_i - y_f)\cos 0 = -mg(y_f - y_i)$$

Esta ecuación del trabajo gravitacional W_g se cumple para cualquier objeto, independientemente de su trayectoria en el espacio, ya que la fuerza gravitacional es conservativa. W_g *aparecerá como el trabajo realizado por la gravedad en el teorema* trabajo-energía.

$$\mathbf{W_{neto} = W_{nc} + W_g = \Delta K}$$

$W_{nc} - mg(y_f - y_i) = \Delta K$ Por lo que resulta: $W_{nc} = \Delta K + mg(y_f - y_i)$

Ahora, por definición, haremos la conexión entre trabajo gravitacional y energía potencial gravitacional.

La **energía potencial gravitacional (U_g)** de un **sistema que consiste en la Tierra y un objeto de masa *m cerca de la superficie terrestre se define*** *como:*

$$U_g \equiv mg\,y$$

donde *g es la aceleración de la gravedad e y es la posición vertical de la masa relativa* a la superficie de la Tierra (o algún otro punto de referencia).

Unidad SI: joule (J)

Trabajo gravitacional y energía potencial gravitatoria

$$U_g \equiv mg\,y$$

.

En esta definición, *y =0 corresponde a la superficie de la Tierra, pero esto no es estrictamente* necesario, como veremos, sino que sólo importan las *diferencias en la energía potencial.*

Por esto, la energía potencial gravitacional asociada con un objeto ubicado cerca de la superficie terrestre es el peso del objeto *mg por su posición vertical y sobre de la Tierra.*

De esta *definición, tenemos la correspondencia entre trabajo gravitacional y energía potencial* gravitacional:

$$W_g = -(U_{gf} - U_{gi}) = -(mgy_f - mgy_i)$$

El trabajo realizado por la gravedad es el mismo que el negativo del cambio en la energía potencial gravitacional.

El trabajo que realiza el peso es igual a menos la variación de la energía potencial gravitatoria

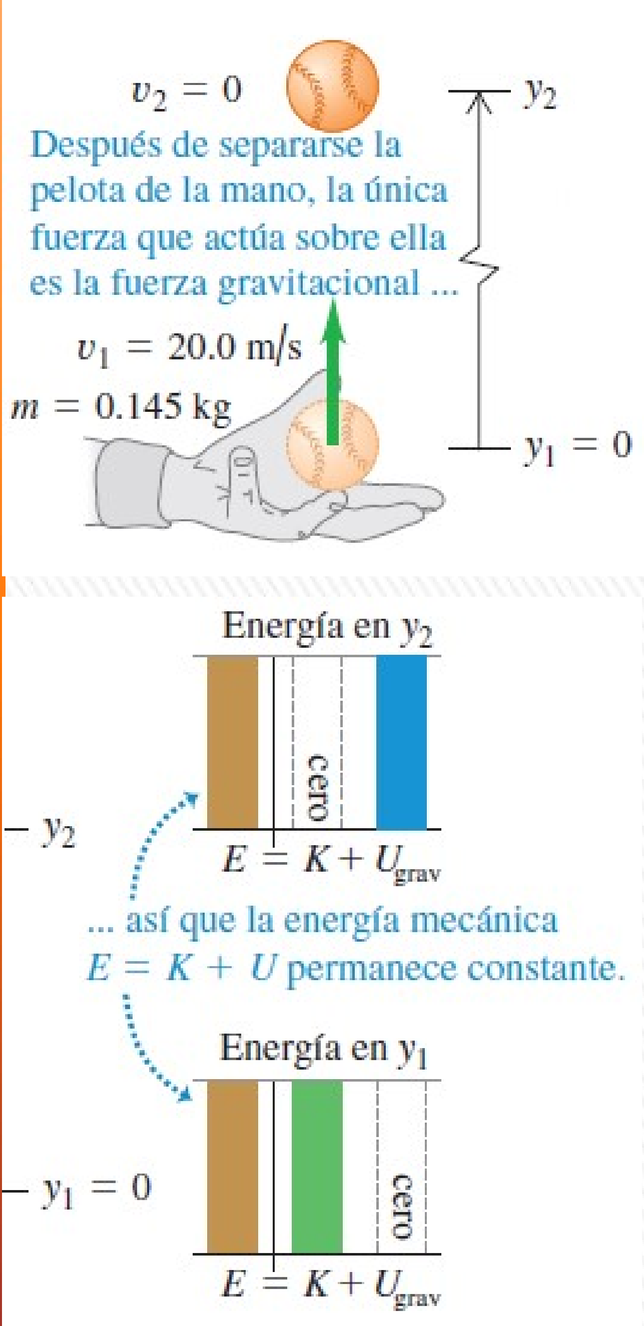
Trabajo gravitacional y energía potencial gravitatoria

Niveles de referencia para la energía potencial gravitacional

En la solución de problemas que involucran a la energía potencial gravitacional, es importante optar por un punto de referencia en la cual la energía sea igual a cero.

La elección es completamente arbitraria ya que la cantidad importante es la *variación de cambio de energía* potencial, y ésta será independiente de la elección del punto de referencia.

De cualquier modo, una vez que se decide por esta posición, debe permanecer fija para un problema determinado.



Ejemplo

Se lanza una pelota con masa de 0,145 kg hacia arriba, dándole una velocidad inicial de magnitud igual a 20,0 m/s.
Determine qué altura alcanza, despreciando la resistencia del aire.

W = ΔK (por teorema trabajo-energía)
La única fuerza que realiza trabajo es el peso:
$W_g = \Delta K$ y $W_g = -\Delta U_g$

$\Delta U_g + \Delta K = 0$ $U_{g1} + K_1 = U_{gr} + K_2$

Elijo que en $y_1=0$ por tanto $U_{g1} = 0$
La altura máxima se alcanza cuando la velocidad se anula, por tanto $K_2=0$

$K_1 = U_{g2}$

$$\tfrac{1}{2} m v_1^2 = m g y_2$$

$$y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = 20.4\ \text{m}$$