Práctico 6: Convergencias, LGN y TCL

Distintos tipos de convergencias

1. Sean $\{X_n\}_n$ e $\{Y_n\}_n$ dos sucesiones de v.a. tales que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ y $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} Y$. Demostrar que $X_n + Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X + Y$.

2. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a. tales que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} a$, siendo a una constante. Sea $g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $x = a$. Demostrar que $g(X_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} g(a)$.

3. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a. tales que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que $g(X_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} g(X)$.

4. Sean $\{X_n\}_n$, $\{Y_n\}_n$ dos sucesiones de v.a. tales que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ y $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} Y$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que $g(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} g(X, Y)$.

5. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a. tales que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ y sean $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones numéricas tales que $a_n \to a > 0$ y $b_n \to b$. Demostrar que $a_n X_n + b_n \to aX + b$.

6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias y una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}X_n \to a$ y $var(X_n) \to 0$. Probar que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} a$.

7. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias discretas con recorrido $\mathcal{R}_X = \{-1, 0, 1\}$ y tal que $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{i+1}$ y $P(X_i = 0) = 1 - \frac{2}{i+1}$. Probar que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$.

8. Buscar un contraejemplo para mostrar que la convergencia en probabilidad $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ no implica la convergencia casi segura $X_n \xrightarrow[n]{\textbf{c.s.}} X$.

9. Buscar un contraejemplo para mostrar que la convergencia en distribución (débil) $X_n \xrightarrow[n]{\mathbf{d}} X$ no implica la convergencia en probabilidad $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$.

10.(Teorema de Crámer-Slutsky) Sean $\{X_n\}_n$, $\{Y_n\}_n$ dos sucesiones de v.a. tales que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbf{d}} X$ (siendo X una v.a.) y $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} a$ (siendo a una constante). Demostrar que:

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow[n]{\mathbf{d}} X + a$

(b) $X_n Y_n \xrightarrow[n]{\mathbf{d}} aX$

(c) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n]{\mathbf{d}} \frac{X}{a}$ si $a \neq 0$.

11. Sean $\{X_n\}_n$ variables aleatorias independientes dos a dos tales que:

- existe $a_i = \mathbb{E}(X_i)$ para todo i;

- existe $\sigma_i^2 = var(X_i)$ para todo i y existe un c tal que $var(X_i) \leq c \forall i$.

Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_i) \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$.

Sugerencia: usar la desigualdad de Chebyshev.

Aplicaciones de la Ley de los Grandes Números y Teorema Central del Límite

12. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. tales que $\mathbb{E}X_1 = \mu$ y $\mathbf{var}X_1 = \sigma^2 < \infty$ $(\sigma > 0)$.

(a) Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2$.

(b) Sea $\displaystyle s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$. Probar que $s_n^2 \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \sigma^2$ y que $s_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \sigma$.

(c) Calcular $\mathbb{E}(s_n^2)$.

(d) ¿Se cumple que $\mathbb{E}(s_n) = \sigma$? *Sugerencia: usar la desigualdad de Jensen*[1].

13.(Método de Monte Carlo)

(a) Sean $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables i.i.d. con distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Mostrar que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(U_i\right) \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

(b) Sea D una región arbitraria del cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$

a) Sean $U_1,\ U_2, \ldots, U_n$ vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos con distribución uniforme en el cuadrado. Si

$$a_n = \frac{\#\left\{i : 1 \leqslant i \leqslant n \ y \ U_i \in D\right\}}{n},$$

probar que $a_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}}$ área(D).

b) Probar que para n grande

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}\left|a_n - \text{área}(D)\right|}{\sqrt{\text{área}(D)(1 - \text{área}(D))}} \geqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cong \alpha.$$

(c) Estimación de π:

a) Diseñar un experimento que permita dar una estimación del número π utilizando el método de Monte Carlo.

[1]Desigualdad de Jensen: si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con $\varphi(x)'' \geqslant 0\ \forall x$, entonces $\varphi\left(\mathbb{E}X\right) \leqslant \mathbb{E}\varphi(X)$. Además el igual se cumple si $\varphi(x)$ es lineal. El enunciado anterior es válido más en general para cualquier φ convexa

b) Si queremos estimar π a menos de 0.01 con un probabilidad mayor a 0.95. ¿Cuál deber ser el mínimo valor de n?

14. La viscosidad de un fluido puede ser medida experimentalmente dejando caer una pequeña bola en un tubo calibrado conteniendo dicho líquido y observando la variable aleatoria X que representa el tiempo que demora la bola en subir a la superficie. Se asume que para un tipo de líquido en particular, la distribución de X es Normal con media 20 segundos y desvío estándar 0.5 segundos.

(a) ¿Cuál es el desvío éstandar del tiempo promedio de 40 experimentos independientes iguales al anterior?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de los 40 experimentos sea superior a 20.1 segundos?

(c) Suponga que el experimento se repite 20 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio sea superior a 20.1 segundos?

(d) ¿El resultado de la parte 3 es mayor o menor que el hallado en la parte 2? Explique la desigualdad.

15. Asumiendo que si X e Y son variables aleatorias con distribución Normal, entonces $X+Y$ también tiene distribución Normal, hallar la distribución de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ en el caso que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$? ¿Cómo se interpreta esto en términos del TCL?

16. Dos compañías de trenes operan el mismo trayecto entre dos ciudades con poblaciones muy numerosas. Los trenes salen y llegan en los mismos horarios, el costo es el mismo y el comfort de ambos es equiparable de modo que los pasajeros no tienen preferencia por ninguna de las dos compañías y su elección es enteramente al azar. En el momento de mayor ocupación se tienen $n = 1000$ pasajeros en la estación. Se sabe que cada tren tiene una cantidad m de asientos que es menor que n.

(a) Calcular aproximadamente y en función de m la probabilidad de que más de m pasajeros elijan a una misma compañia.

(b) ¿Cuántos asientos debería tener el tren si se quiere asegurar que la probabilidad anterior sea menor que 0.01?

(c) Si ambas compañias deciden tener la cantidad de asientos dada por la parte anterior ¿cuál sería el número total de asientos vacíos?

17. ¿Le creerías a un amigo que dice haber obtenido un promedio de 3.25 en 1000 lanzamientos de un dado equilibrado?