Práctico 7

Subespacios y conjuntos LD y LI

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos W_1 y W_2 son subespacios del espacio V.

   a) $V=\mathbb{R}^2$, $W_1=\{(x,y):\ 2x=3y\}$ y $W_2=\left\{(x,y):\ x^2=y^2\right\}$.

   b) $V=\mathbb{R}^3$, $W_1=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq 0\right\}$ y $W_2=\{(x,y,z):\ x+y-z=0,\ 2x+3y=0\}$.

   c) $V=\mathbb{R}^4$, $W_1=\{(x,y,z,t):\ t=x+y+z\}$ y $W_2=\{(x,y,z,t):\ x+y-z+t=1\}$.

2. Investigar si cada uno de los siguientes subconjuntos de M_n es un subespacio.

   a) El conjunto de las matrices de traza nula.

   b) El conjunto de las matrices invertibles.

   c) Fijado un vector columna arbitrario $v_0\in M_{n\times 1}$, el conjunto de matrices A tales que $Av_0=0$.

3. En los casos siguientes determinar si W es un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$).

   a) $W=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}):\ f(5)=0\}$.

   b) $W=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}):\ f(1)=0 \text{ o } f(-1)=0\}$.

   c) $W=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}):\ f(1)=f(0)\}$.

4. En los casos siguientes investigar si v y w pertenecen a $[A]$ (el subespacio generado por el conjunto A).

   a) $A=\left\{3x^3+x+1,\ -2x^2+x-1,\ 3x^3-2x^2+2x+1\right\}$, $v=3x^3-4x^2+3x-2$ y $w=6x^3-2x^2+4x+1$.

   b) $A=\left\{\begin{pmatrix}3&1\\-2&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$, $v=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}3&-2\\-5&8\end{pmatrix}$.

5. Se considera el conjunto $A=\left\{x^3+x+1,\ x^3+x^2,\ -2x^3+x+1,\ x^3+3x^2+x+1\right\}\subset\mathbb{R}[x]$. Probar que A es LD y determinar los vectores de A que pueden ser expresados como combinación lineal de los restantes.

6. En los siguientes casos determinar si el conjunto A es LI o LD. Cuando el conjunto A sea LD, se pide:

   - encontrar una combinación lineal no trivial de los vectores de A que dé el vector nulo;
   - escribir alguno de los vectores de A como combinación lineal de los restantes;
   - encontrar $A_0\subset A$ que sea LI y tal que los restantes vectores de A sean combinaciones lineales de A_0.

   a) $A=\{(1,1,1),\ (1,2,4),\ (1,3,9)\}\subset\mathbb{R}^3$.

   b) $A=\{(1,2,2),\ (1,-3,2),\ (1,0,2)\}\subset\mathbb{R}^3$.

   c) $A=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}6&1\\4&4\end{pmatrix}\right\}\subset M_2$.

   d) $A=\left\{\begin{pmatrix}-1&4\\5&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&7\\8&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\-1&5\end{pmatrix}\right\}\subset M_2$.

   e) $A=\{x^2+x-1,\ x^2-x+1,\ -x^2+x+1\}\subset\mathbb{R}_2[x]$.

   f) $A=\{x^2+x+2,\ -2x^2+x-1,\ x^2-2x-1\}\subset\mathbb{R}_2[x]$.

   g) $A=\{x^3+1,\ x^2-1,\ x^3+x^2,\ x+1\}\subset\mathbb{R}_3[x]$.

   h) $A=\{x^3+x-1,\ 2x^3+x^2-1,\ x^2-2x+1,\ x^3+x^2-x\}\subset\mathbb{R}_3[x]$.

   i) $A=\{e^x,\ e^{-x}\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   j) $A=\{e^x,\ \operatorname{senh}(x),\ \cosh(x)\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, siendo $\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ y $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ las funciones *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*, respectivamente.

   k) $A=\{(a,-a^2,1),\ (-1,1,a),\ (0,2a^2,a^2+1)\}\subset\mathbb{R}^3$. Discutir según $a\in\mathbb{R}$.

   l) $A=\{4x+3,\ x^2-1,\ ax^2+4x+5\}\subset\mathbb{R}_2[x]$. Discutir según $a\in\mathbb{R}$.